

Topologische Minkowskiebenen

von
Antonie Schenkel
aus
Schwabach

1980 № 375

Topologie der Euklidischen Ebenen



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Topologische Minkowskiebene

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

zur

Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt

von

Antonie Schenkel

aus

Schwabach

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fakultäten der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung:

12. Mai 1980

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. H. Wegener

Erstberichterstatter:

Professor Dr. K. Strambach

Zweitberichterstatter:

Professor Dr. H.-J. Groh

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	2
Bezeichnungen	5
§1 Axiome und topologische Grundtatsachen	7
§2 Kohärente Minkowskielebenen	20
§3 Zusammenhängende und Kompakte Minkowskielebenen	28
§4 Kompakte Zweidimensionale Minkowskielebenen	47
§5 Automorphismengruppe einer topologischen kompakten Minkowskiebene der Dimension 2	54
Literaturverzeichnis	64
Lebenslauf	67

Einleitung

Gibt es zu einer Klasse von Inzidenzstrukturen topologische Modelle, d.h. Modelle, bei denen die sich aus der Geometrie ergebenden Abbildungen, wie z.B. das "Schneiden" und das "Verbinden", Stetigkeitseigenschaften besitzen, so kann man, indem man umgekehrt zu den die Klasse beschreibenden Axiomen diese topologischen Eigenschaften als Forderungen hinzufügt, die zugehörige Kategorie topologischer Geometrien definieren. Speziell trifft dies auch für die Klasse der Benzebenen zu, die die Geometrie der ebenen Schnitte einer quadratischen Fläche im 3-dimensionalen projektiven Raum verallgemeinern. Eine Topologisierung der Benzebenen kann sich dabei auf die Arbeiten von H. Salzmann stützen, der durch eine Note von Kolmogorov angeregt, die Klasse der topologischen projektiven und affinen Ebenen eingeführt und seit 25 Jahren intensiv untersucht hat. Die topologischen Möbiusebenen wurden bereits von Strambach und Wölk, die topologischen Laguerreebenen von Groh ausführlich untersucht. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit topologischen Minkowskiebenen, die die Geometrie der ebenen Schnitte eines einschaligen Hyperboloids im projektiven Raum verallgemeinern. Es zeigt sich, daß topologische Minkowskiebenen ähnliche Trennungs- und Zusammenhangseigenschaften aufweisen wie alle bisher untersuchten Geometrien: Sie sind regulär und der Punktraum ist entweder zusammenhängend oder nirgends zusammenhängend. Ebenso wie bei Laguerreebenen zeigen im klassischen Fall die geometrischen Abbildungen einer topologischen Minkowskiebene ein gewisses Grenzverhalten. So kann man etwa das Bilden von Parallelklassen als Grenzfall des Verbindens ansehen. Deshalb empfiehlt es sich, entsprechend

der Grohschen Vorgehensweise bei Laguerreebenen (Groh [1968]), neben den Stetigkeitsaxiomen Kohärenzaxiome zu formulieren und kohärente Minkowskielebenen zu untersuchen. Da auf den Punkten einer Minkowskiebene zwei Parallelrelationen existieren, sind die Axiome und die Untersuchung komplizierter als bei Laguerreebenen. Insbesondere läßt sich nur unter (allerdings natürlichen) Zusatzbedingungen zeigen, daß die affinen Unterstrukturen topologische affine Ebenen im Sinne von Salzmann [TP. 67] sind. Dies ist etwa dann der Fall, wenn die Kreise eindimensionale, kompakte Räume sind. Dann ist der Punktraum zweidimensional und kompakt, ja sogar ein Torus. Diese, bezüglich ihrer topologischen Eigenschaften mit den klassischen gleichwertigen Geometrien, bieten somit den naheliegenden Gegenstand einer Klassifikation. Sie erfüllen alle Kohärenzaxiome und sind dadurch gekennzeichnet, daß Kreise und parallelklassen Jordankurven sind. Wie in allen anderen zweidimensionalen Geometrien sind auch in dieser Situation alle geometrischen Isomorphismen topologisch und die Automorphismengruppe eine höchstens 6-dimensionale Liegruppe. Um dies zu zeigen, benutzt man einige Ergebnisse aus der Liethorie, wie z.B. daß jede endlichdimensionale lokal kompakte Gruppe beliebig kleine Normalteiler mit Liescher Faktorgruppe enthält und jede 0-dimensionale kompakte Transformationsgruppe einer 2-Mannigfaltigkeit endlich ist. Die Eigenständigkeit der Untersuchung von Minkowskielebenen fußt auf der Existenz von zwei Parallelrelationen der Punkte, die sich bei der Untersuchung der Automorphismengruppe ausnutzen lassen. Denn bei genügend großer Dimension dieser Gruppe läßt sich die Zusammenhangskomponente der Eins als direktes Produkt zweier Transformationsgruppen der Kreislinie N_+ und N_- beschreiben. Dabei ist $N_{+(-)}$ diejenige Untergruppe der Automorphismengruppe, die die $+(-)$ -Parallelklassen (als Ganzes) festläßt und auf den $-(+)$ -Parallelklassen effektiv operiert.

Mit Hilfe dieser Zerlegung lassen sich zweidimensionale Minkowskielebenen mit 4-dimensionaler Automorphismengruppe elegant klassifizieren. Dabei zeigt sich, daß Ebenen mit mindestens 5-dimensionaler Automorphismengruppe miquelsch sind. Bei 4-dimensionaler Automorphismengruppe existiert eine Klasse nichtklassischer Beispiele. Diese besitzen eine desarguesche Ableitung, in der sich die Spuren der Kreise, die keine Geraden dieser Ebene sind, durch gewisse hyperbolische Kurven darstellen lassen. Diese Beispiele sind eine Verallgemeinerung der von Hartmann gefundenen nichtklassischen Modelle. Wie die entsprechenden Arbeiten von Strambach über Möbiusebenen mit 3-dimensionaler Automorphismengruppe zeigen, würde eine Klassifikation der Minkowskielebenen mit 3-dimensionaler Automorphismengruppe wegen der Vielfalt der vorhandenen Modelle ausufern und den Rahmen einer solchen Arbeit sprengen.

Lediglich bei einer 3-dimensionalen $+$ - oder $-$ -Trägheitsgruppe lassen sich die Ebenen, ähnlich wie das von Benz entwickelte gruppentheoretische Modell der klassischen Minkowskielebenen, beschreiben: Punkte und die Inzidenzbeziehung werden wie im genannten Modell definiert. Bei den Kreisen ersetzt man die Gruppe $PGL_2(\mathbb{R})$ durch die Menge der Homöomorphismen der Kreislinie $PSL_2(\mathbb{R}) \cup fPSL_2(\mathbb{R})$, wobei f ein Orientierungsumkehrender Homöomorphismus der Kreislinie ist.

Herrn Professor Dr. Strambach, der diese Arbeit angeregt und ihren Fortgang durch sein Interesse und seine ständige Bereitschaft zu klärenden Gesprächen sehr gefördert hat, danke ich sehr herzlich. Ich danke auch Herrn Professor Dr. Groh vielmals für seine wertvollen Anregungen, und allen, die mir bei der Erstellung dieser Arbeit geholfen haben.

VERWENDETE BEZEICHNUNGEN

$\mathbb{P}$	Punktraum
$\mathbb{K}$	Kreisraum
$p \parallel_{+(-)} q$	p ist $+-$ bzw. $--$ -parallel zu q
$p \not\parallel_{+(-)}$	p ist nicht $+-$ bzw. $--$ -parallel zu q
$\alpha(p_1, p_2, p_3)$	Verbindungskreis von p_1, p_2 und p_3
$\beta(p, q, K)$	Berührkreis durch p von K in q
$\pi^{+(-)}(p, K)$	$+-$ bzw. $--$ -Projektion von p auf K
$\pi(p, q)$	der zu p plus- und zu q minusparallele Punkt
$[p]_{+(-)}$	Plus- bzw. Minusparallelklasse von p
$[x]_{+(-)}$	der von der Menge x erzeugte Plus- bzw. Minusparallelstreifen
$\mathbb{B}(p)$	Menge der Kreise durch den Punkt p
$\mathbb{B}(p_1, p_2)$	Schnittbüschel durch p_1 und p_2
$\mathbb{B}(p, K)$	Berührbüschel durch p an K
A_p	die in p abgeleitete affine Unterebene
$\mathbb{P}_p$	Punktraum von A_p
G_p	Geradenraum von A_p
$\alpha_p, \beta_p, \gamma_p, \pi_p^{+(-)}, \pi_p$	entsprechende geometrische Abbildung in A_p
τ	ternäre Verknüpfung
K_i - kohärent	in der Minkowskiebene ist das i -te Kohärenz-Axiom erfüllt
$\rho_{K_1 K_2 x y}$	Perspektivität von K_1 nach K_2 mit Zentren x, y
$F(K, \mathbb{P})$	Menge der stetigen Funktionen von K nach $\mathbb{P}$
$\tilde{M}$	Ist M eine Menge von Kreisen, so bezeichnet $\tilde{M}$ die Menge der Punkte, die auf den Kreisen von M liegen.
$\mathbb{K}U$	Ist U eine Punktmenge, so ist $\mathbb{K}U$ die Menge der Kreise, die ganz in U liegen.

$\text{rd } U$	Rand der Menge U
S_n	n - Sphäre
$N_+(-)$	$+$ $(-)$ - Trägheitsgruppe einer Minkowskiebene
$\text{PGL}_2(\mathbb{R})$	projektive lineare Gruppe über $\mathbb{R}$
$\text{PSL}_2^{(n)}(\mathbb{R})$	n -fache Überlagerung der spez. proj. lin. Gr.
L_2	Gruppe der Abbildungen $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\{x \longrightarrow ax + b \mid$ $a, b \in \mathbb{R}, a > 0\}$
SO_2	spezielle orthogonale Gruppe
$\mathbb{R}^+$	multiplikative Gruppe der reellen positiven Zahlen
$M(f)$	Minkowskiebene mit den Kreisen $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \cup f \text{ PSL}_2(\mathbb{R})$ (siehe S.9)
$\square$	bezeichnet das Ende eines Beweises

§ 1 Axiome und topologische Grundtatsachen

Eine Minkowskiebene M besteht aus einer Menge $\mathbb{P} \neq \emptyset$ von Punkten, einer Menge $\mathbb{K} \neq \emptyset$ von Kreisen, zwei Parallelrelationen $\parallel_+, \parallel_-$ auf $\mathbb{P}$ und einer Inzidenzbeziehung $I \subseteq \mathbb{P} \times \mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften.

- M1) Durch je drei paarweise weder $+-$ noch $--$ parallele Punkte p_1, p_2, p_3 geht genau ein Kreis $\alpha(p_1, p_2, p_3)$.
- M2) Zu jedem Tripel $(p, q, K) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{K}$ mit $p \mathcal{H}_{+(-)} q$ und $q I K$ existiert genau ein Kreis $\beta(p, q, K)$ der p und q enthält und mit K nur den Punkt q gemeinsam hat.
- M3) Zu jedem Punkt p und jedem Kreis K existiert genau ein Punkt $\pi^+(p, K) I K$ und ein Punkt $\pi^-(p, K) I K$ mit $\pi^+(p, K) \parallel_+ p$ und $\pi^-(p, K) \parallel_- p$.
- M4) Zu je zwei Punkten p, q existiert genau ein Punkt $\pi(p, q)$ mit $\pi(p, q) \parallel_+ q$ und $\pi(p, q) \parallel_- q$.
- M5) Es gibt vier nicht konzyklische, paarweise nicht parallele Punkte.

Aus dem Axiomensystem ergibt sich, daß die Parallelrelationen Äquivalenzrelationen sind. Das klassische Modell dieser Geometrie ist die Geometrie der ebenen Schnitte eines einschaligen Hyperboloids im 3-dimensionalen projektiven Raum. (Dies sind auch genau die Modelle, die den Schließungssatz von Miquel erfüllen.) Näheres siehe Benz [1968] und Benz [1973].

Betrachtet man im komplexen oder reellen projektiven Raum ein einschaliges Hyperboloid, so tragen Punkt- und Kreisraum der zugehörigen Minkowskiebene Topologien, so daß die topologische Struktur mit der geometrischen in natürlicher Weise verbunden ist, d. h. das Verbinden, das Berühren, das Schneiden und das Parallelprojizieren sind stetige Abbildungen.

Es ist deshalb sinnvoll ebenso wie bei den übrigen Geometrien dieser Art, topologische Minkowskiebene durch folgendes Axiomensystem zu definieren.

1.1 Definition. Eine topologische Minkowskiebene ist eine Minkowskiebene deren Punktraum $\mathbb{P}$ und Kreisraum $\mathbb{K}$ Topologien tragen, so daß folgende Abbildungen stetig sind:

- A1 $\alpha : \mathbb{P}^{3'} \longrightarrow \mathbb{K}$ definiert durch $(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow \alpha(x_1, x_2, x_3)$ aus M1 (Verbindenden), wobei $\mathbb{P}^{3'}$ die Menge aller Tripel von verbindbaren Punkten ist.
- A2 $\beta : (\mathbb{P} \times \mathbb{P} \times \mathbb{K})' \longrightarrow \mathbb{K}$ definiert durch $(p, q, K) \longrightarrow \beta(p, q, K)$ aus M2 (Berühren), wobei $(\mathbb{P} \times \mathbb{P} \times \mathbb{K})'$ die Menge aller Tripel (p, q, K) ist mit $p \not\parallel q, q \not\subset K$.
- A3 $\gamma : \mathbb{K}^{2'} \longrightarrow \mathbb{P}^{2*}$ definiert durch $(K, Z) \longrightarrow K \cap Z$ (Schneiden), wobei $\mathbb{K}^{2'}$ die Menge der Paare nicht disjunkter Kreise und $\mathbb{P}^{2*}$ das symmetrische Produkt von $\mathbb{P}$ sind.
- A4 $\pi^+ : \mathbb{P} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{P}$ + - Parallelprojektion aus M3.
 $\pi^- : \mathbb{P} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{P}$ - - Parallelprojektion aus M3.
- A5 $\pi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}$ definiert durch $(p, q) \longrightarrow \pi(p, q)$ aus M1.

Bemerkung: Im folgenden wird ein Kreis stets mit der Menge der ihm inzidenten Punkte identifiziert.

Aus diesem Axiomensystem ergeben sich sofort folgende Aussagen:

- 1.2. a) $+(-)$ - Parallelklassen sind homöomorph (wobei $+(-)$ - Parallelklassen die Äquivalenzklassen von $||_+$ und $||_-$ sind).
- b) Kreise sind homöomorph zu $+ -$ und zu $- -$ Parallelklassen.
- c) Kreise und Parallelklassen sind homöomorph.

Es seien p_1, p_2 zwei verbindbare Punkte und p und K ein Punkt und ein Kreis mit $p \in K$. Das Schnittbüschel $B(p_1, p_2)$ ist die Menge aller Kreise durch p_1 und p_2 , das Berührbüschel $B(p, K)$ die Menge aller Kreise die K in p berühren.

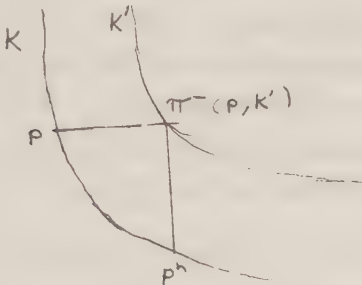
Für Schnittbüschel und Berührbüschel gilt:

- 1.3. a) Schnittbüschel sind homöomorph zu Parallelklassen aus denen zwei Punkte entfernt sind.
- b) Berührbüschel sind homöomorph zu Parallelklassen aus denen ein Punkt entfernt ist.

Beweis: a) Sei $[p_0]_+$ die $+ -$ Parallelklasse zum Punkt p_0 mit $p_0 \nparallel p_i$, $i = 1, 2$,
 $h : B(p_1, p_2) \longrightarrow [p_0]_+ \setminus \{\pi(p_0, p_i) : i = 1, 2\}$
definiert durch $K \longrightarrow \pi_+(p_0 K)$
 $h^{-1}(x) = \alpha(p_1, p_2, x)$ für $x \in [p_0]_+ \setminus \{\pi(p_0, p_i) : i = 1, 2\}$.

b) Sei $p_0 \nparallel p$
 $h : B(p, K_0) \longrightarrow [p_0]_+ \setminus \{\pi(p_0, p)\}$
definiert durch $K \longrightarrow \pi^+(p_0, K_0)$
 $h^{-1}(x) = \beta(x, p, K_0)$ für $x \in [p_0]_+ \setminus \{\pi(p_0, p)\}$. $\square$

b) Es seien K und K' disjunkte Kreise $h : K \rightarrow K$ definiert durch $p \rightarrow \pi^*(\pi^-(p, K')K)$.



□

1.5 Satz: Der Punktraum ist homöomorph zum Produkt von zwei Parallelklassen.

Beweis: $h : \mathbb{P} \rightarrow [p]_+ \times [p]_-$ definiert durch
 $x \rightarrow (\pi(p, x), \pi(x, p))$.

Schließt man bei topologischen Minkowskiebenen die indiskrete Topologie, was wir im Folgenden tun wollen, so ergeben sich aus der geometrischen Struktur, ebenso wie bei anderen topologischen Geometrien, Trennungseigenschaften der Topologie:

Aus 1.4 und 1.5 folgt sofort

1.6. Der Punktraum einer topologischen Minkowskiebene ist ein T_1 -Raum.

Daraus ergibt sich ebenfalls mit 1.5

1.7. Parallelklassen und Kreise sind abgeschlossen in $\mathbb{P}$.

Um weitere Trennungseigenschaften in topologischen Minkowskiebenen beweisen zu können, empfiehlt es sich die affinen Unterstrukturen

der Inzidenzstruktur zu betrachten:

Für jeden Punkt p einer Minkowskiebene tragen $\mathbb{P}_p := \mathbb{P} \setminus ([p]_+ \cup [p]_-)$ und die Kreise $B(p)$ durch p die Inzidenzstruktur, die man erhält, wenn man aus einer affinen Ebene zwei Parallelscharen entfernt. Diese Unterstruktur A_p heißt Ableitung in p oder in p abgeleitete affine Unterebene von M , die Kreise $B(p)$ sind die Geraden G_p von A_p .

Ist die Minkowskiebene topologisch, so sind es auch die affinen Unterebenen in folgendem Sinne:

1.8. Eine affine Unterebene heißt topologisch, falls ihr Punkt- und Geradenraum mit Topologien versehen sind, so daß folgende Abbildungen stetig sind:

- 1) $\alpha_p : \mathbb{P}_p^{2'} \longrightarrow G_p$ Verbinden
($\mathbb{P}_p^{2'}$ Paare verbindbarer Punkte von $\mathbb{P}_p$)
- 2) $\beta_p : (\mathbb{P}_p \times G_p) \longrightarrow G_p$ Parallelenziehen
- 3) $\gamma_p : (G_p \times G_p) \longrightarrow \mathbb{P}_p$ Schneiden
- 4) $\pi_p^+ : (\mathbb{P}_p \times G_p) \longrightarrow \mathbb{P}_p$ + - Parallelprojektion auf Geraden
 $\pi_p^- : (\mathbb{P}_p \times G_p) \longrightarrow \mathbb{P}_p$ - - Parallelprojektion auf Geraden
- 5) $\pi_p : \mathbb{P}_p^2 \longrightarrow \mathbb{P}_p$ def. durch $(r, q) \longrightarrow x$
mit $r \parallel_+ x \parallel_- q$.

Aus dem vorher gezeigten folgt sofort

1.9. Die affinen Unterebenen einer topologischen Minkowskiebene sind homöomorph.

Die affinen Unterebenen A_p einer topologischen Minkowskiebene

sind, wenn man die Parallelklassen als Geraden ansieht, im allgemeinen keine topologischen affinen Ebenen im Sinne von Salzmann [TP. 67], da das Verbinden nicht überall stetig sein muß. Deshalb lassen sie sich nicht immer durch einen topologischen Ternärkörper ¹⁾ koordinatisieren. Jedoch haben die Ternärkörper dieser Struktur viele Eigenschaften, die auch ein topologischer Ternärkörper aufweist. Um dies zu untersuchen betrachten wir folgende Koordinatisierungen einer Unterebene:

1.10. a) Koordinatisierung von A_p mit zwei Parallelklassen

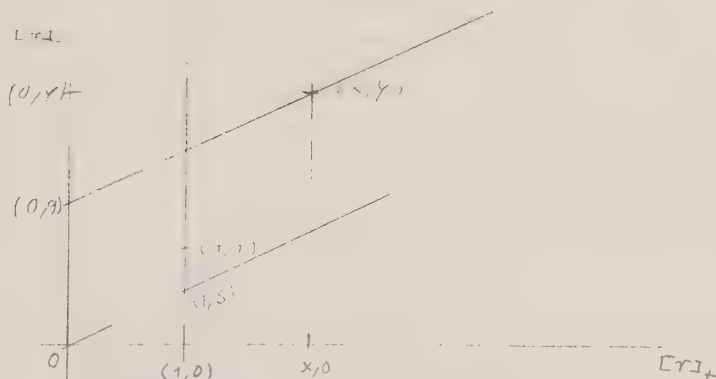
$[r]_+$ und $[r]_-$ als Grundgeraden:

Ternäroperation: $\tau : R^3 \longrightarrow R$

$$\tau(s, x, q) = y \iff$$

$$\iff (0, y) = \pi_p[\pi_p^{-1}((x, 0), \beta_p[(0, q), \alpha((1, s), (0, 0))])], (0, 0)] \text{ falls } s \neq 0$$

$$(0, y) = \pi_p(\pi_p[(0, q), (x, 0)], (0, 0)) = (0, q) \text{ falls } s = 0$$



¹⁾ Definition siehe Salzmann [TP 67]

$$\tau^{-1}(s, x, y) := t(s, x, y) = q \Leftrightarrow (0, q) = \pi_p^{-1}[\beta_p((x, y) \alpha((1, s), (0, 0)), (0, 0))].$$

τ und t haben folgende Stetigkeitseigenschaften:

- 1) τ ist stetig auf $R \setminus \{0\} \times R^2$ und auf $\{0\} \times R^2$
 t ist stetig auf $R \setminus \{0\} \times R^2$ und auf $\{0\} \times R^2$.

Die Addition $\tau(1, x, y) := x + y$ ist stetig auf R^2 ,
 die Multiplikation $\tau(s, x, 0) := s \circ x$ in $R \setminus \{0\} \times R$.

b) Koordinatisierung mit einer Parallelklasse $[r]_{-}$ und einer Geraden K :

Ternäroperation: $\tau : R^3 \longrightarrow R$

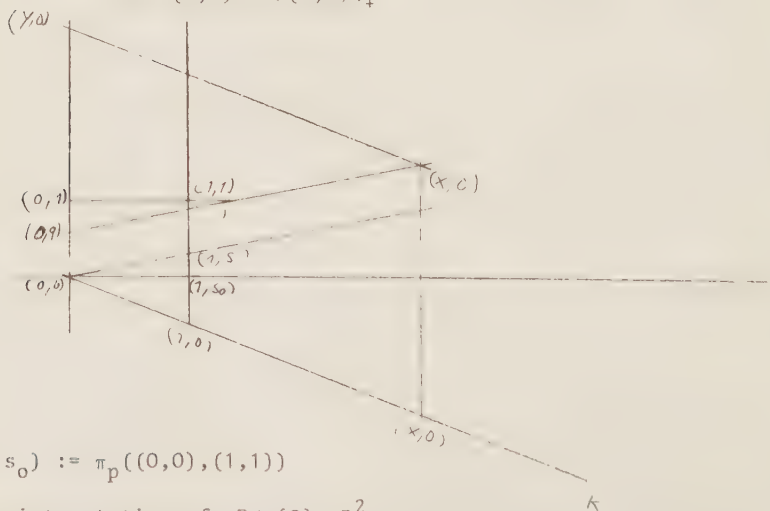
$$\tau(s, x, q) = y \Leftrightarrow$$

$$(0, y) = \pi_p^{-1}((0, 0), \beta_p[\pi_p^{-1}((x, 0), \beta_p[(0, q), \alpha_p((0, 0), (1, s))])], K])$$

für $(1, s) \notin [(0, 0)]_{+}$

$$(0, y) = \pi_p^{-1}((0, 0), \beta_p[\pi_p((0, q), (x, 0))] , K))$$

für $(1, s) \in [(0, 0)]_{+}$



$$(1, s_0) := \pi_p((0, 0), (1, 1))$$

τ ist stetig auf $R \setminus \{0\} \times R^2$

$t = \tau^{-1}$ stetig auf $R \setminus \{s_0\} \times R^2$

Die Addition ist stetig auf $\mathbb{R}^2$ die Multiplikation auf $\mathbb{R} \setminus \{s_0\} \times \mathbb{R}$ und auf $\{s_0\} \times \mathbb{R}$.

Aus der Stetigkeit der Addition folgt nach [Salzmann 55]

1.11. Der Punktraum einer topologischen Minkowskiebene besitzt die Trennungseigenschaft T_3 .

Da die zweite Koordinatisierung eine Multiplikation besitzt die im Nullpunkt stetig ist, läßt sich der Beweis von Salzmann [TP 67] Satz 7.8 auf die Ableitungen einer Minkowskiebene übertragen und es gilt:

1.12. Ist der Punktraum einer topologischen Minkowskiebene lokal-kompakt so ist er metrisierbar.

1.13. Unter dem $+(-)$ -Parallelstreifen $[A]_{+(-)}$ einer Teilmenge A des Punktraums versteht man die Vereinigung aller $+(-)$ -Parallelklassen der Punkte von A .

Zwei Teilmengen A und B des Punktraums heißen $+(-)$ -paralleldisjunkt falls $[A]_{+(-)} \cap [B]_{+(-)} = \emptyset$, paralleldisjunkt falls sie sowohl $+$ als auch $-$ -paralleldisjunkt sind.

Bemerkung: Es gilt immer $[A]_+ \cap [B]_- \neq \emptyset$ falls sowohl A als auch B nicht leer sind.

1.14. a) Zu zwei verbindbaren Punkten p_1 und p_2 existieren paralleldisjunkte Umgebungen.

b) Der Definitionsbereich des Verbindens ist offen.

- c) Der Kreisraum einer topologischen Minkowskiebene ist homöomorph zu einem offenen Unterraum Produkt von drei Parallelklassen.

Beweis: a) Es seien p_1 und p_2 zwei verbindbare Punkte und K ein Kreis mit $p_i \in K$ für $i = 1, 2$.
Auf K existieren disjunkte offene Umgebungen U_i^+ $i = 1, 2$,
 $[U_i^+]_{+(-)}$ sind dann offene Mengen die p_i enthalten und es gilt
 $[U_1^+]_{+(-)} \cap [U_2^+]_{+(-)} = \emptyset$. Damit leisten die Mengen $U_i :=$
 $[U_i^+]_{+} \cap [U_i^+]_{-}$ das gewünschte.
b) und c) folgen direkt aus a).

Aus 1.11 und 1.14 folgt sofort

1.15. Eine topologische Minkowskiebene ist regulär.

Korollar: Jede endliche topologische Minkowskiebene ist diskret.

Aus den Homogenitätseigenschaften und der Art der Einbettung in den Punktraum (Satz 1.5) erhält man sofort:

- 1.16.. a) Eine topologische Minkowskiebene ist entweder diskret oder dicht in sich ²⁾, ebenso Kreise und Parallelklassen.
b) Kreise und Parallelklassen einer nicht diskreten Minkowskiebene haben kein Inneres.

Unter einer linearen Umgebung eines Punktes versteht man eine Umgebung eines Punktes auf einen Kreis oder einer Parallelklasse in

²⁾ Ein Raum heißt dicht in sich wenn jeder Punkt Häufungspunkt seines Komplements ist.

der Spurtopologie, für sie gilt:

1.17. Die linearen Umgebungen eines Punktes einer nicht diskreten Minkowskiebene sind unendlich.

Daraus läßt sich folgern:

Korollar: Der Kreisraum einer nicht diskreten Minkowskiebene ist homöomorph zu einem im Produkt von drei Parallelklassen dicht liegenden Unterraum.

Als nächstes wollen wir die Beziehung zwischen der Topologie des Punktraums und des Kreisraums untersuchen:

- 1.18. a) Die Menge der Kreise, die eine offene Punktmenge treffen, ist offen.
 b) Die Menge der Punkte, die auf Kreisen einer offenen Kreismenge liegen, ist offen.
 c) Der von einer offenen Punktmenge erzeugte Parallelstreifen ist offen.

Beweis: a) Sei $O \subseteq \mathbb{P}$ offen und $K \in \mathbb{K}$ mit $O \cap K \neq \emptyset$,
 $p_1 \in K \cap O$ und $p_2, p_3 \in K$ mit $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$. Es ist
 $([p_1]_+ \cap O) \times [p_2]_+ \times [p_3]_+$ offen in $\bigcup_{i=1}^3 [p_i]_+$ und damit, da die
 Einschränkung von α auf die Tripel verbindbarer Punkte aus
 $\bigcup_{i=1}^3 [p_i]_+$ ein Homöomorphismus ist, $\alpha([p_1]_+ \cap O \times [p_2]_+ \times [p_3]_+)$
 offen in $\mathbb{K}$.

b) folgt aus der Stetigkeit von α und der Offenheit des Definitionsbereichs des Verbindens (1.14 c)) und c) aus dem Beweis von Satz 1.5. □

Für die geometrischen Abbildungen ergibt sich daraus:

1.19. a) Das Verbinden ist eine offene Abbildung.

b) Die Abbildungen π^+ , π^- und π sind offen.

Beweis (von b): Es seien $O \subseteq \mathbb{P}$ und $U \subseteq \mathbb{K}$ offene Mengen;

$\tilde{U}$ die Menge der Punkte, die auf einem Kreis von U liegen.

Dann gilt: $\pi^{+(-)}(O, U) = [O]_{+(-)} \cap \tilde{U}$.

Es seien $O_1, O_2 \subseteq \mathbb{P}$ offene Punktmengen

$$\pi(O_1, O_2) = [O_1]_+ \cap [O_2]_-.$$

Aus 1.18 und 1.19 folgt:

1.20. a) Die Mengen $\alpha(O_1, O_2, O_3)$, wobei O_i offene Teilmengen von $\mathbb{P}$ sind, bilden eine Basis der Kreistopologie.

b) Die Mengen von Punkten, die auf den Kreisen einer offenen Kreismenge liegen, bilden eine Subbasis der Punkttopologie.

Beweis: a) Da α eine offene, stetige Surjektion ist, wird eine Basis der Topologie von $\mathbb{P}^{3'}$ durch α auf eine Basis der Kreistopologie abgebildet.

b) Es seien O eine offene Teilmenge von $\mathbb{P}$, K_1, K_2 Kreise die sich in $x \in O$ berühren. Wegen der Stetigkeit des Schniedens existieren disjunkte offene Umgebungen U_i von K_i , so daß $\gamma(U_1, U_2) \subseteq O \times O$. Also gilt $x \in \tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 \subseteq O$.

Folgerung: Ein geometrischer Isomorphismus von Minkowskiebenen ist genau dann stetig, wenn er es auf dem Punktraum oder Kreisraum ist.

1.21. In einer topologischen Minkowskiebene sind die Kreise durch einen Punkt, Schnitt- und Berührungsbüschel abgeschlossen.

Beweis: Ist $(K_d)_{d \in D} \rightarrow K$ ein konvergentes Netz von Kreisen durch einen Punkt p , dann gilt wegen der Stetigkeit von π^+
 $p = \pi^+(p, K_d)_{d \in D} \rightarrow \pi^+(p, K) = p$, also folgt $p \in K$.

Aus der Abgeschlossenheit der Menge der Kreise durch einen Punkt folgen dann mit der Stetigkeit von γ die übrigen Behauptungen.

□

§ 2 Kohärente Minkowskiebenen

Im vorangegangenen Paragraphen wurden allgemeine topologische Minkowskiebenen untersucht, ohne daß dabei topologische Beziehungen der geometrischen Abbildungen angenommen wurden. So wurde nicht berücksichtigt, daß das Berühren der Grenzfall des echten Schneidens ist, und es wurden auch keinerlei Aussagen über das Verhalten der geometrischen Abbildungen am Rand ihres Definitionsbereich gemacht. In allgemeinen topologischen Minkowskiebenen läßt sich darüber auch nichts aussagen. Jedoch treten bei der Geometrie der ebenen Schnitte eines einschaligen Hyperboloides im reellen oder komplexen projektiven Raumes genau die Phänomene auf, die man als natürlich erwartet. Deshalb scheint es sinnvoll, solche "Kohärenzeigenschaften" axiomatisch zu fordern und "kohärente Minkowskiebenen" zu untersuchen.

Um die Kohärenzaxiome präzise formulieren zu können, benutzen wir die Beschreibung der Topologie durch die Konvergenz von Netzen [s.z.B. [Dugundji 66]X1].

2.1 Definition. Eine topologische Minkowskiebene heißt kohärent, falls folgende Axiome gelten:

K1: Sind $(p_d)_{d \in D}$; $(t_{id})_{d \in D} \subseteq \mathbb{P}$; $i = 1, 2$ $(K_d)_{d \in D} \subseteq \mathbb{K}$ Netze über einer gerichteten Menge D mit $t_{1d} \neq t_{2d}$, $(t_{id} \in K_d$, $(K_d)_{d \in D} \rightarrow K \in \mathbb{K}$; $(p_d)_{d \in D} \rightarrow p$ und $(t_{id})_d \rightarrow t \not\in p$ für $i = 1, 2$ gilt, so gilt: $(\alpha(p, t_{1d}, t_{2d}))_{d \in D} \rightarrow \beta(p, t, K)$.

K2: Gilt $(p_{id})_{d \in D} \rightarrow p_i$ für $i = 1, 2, 3$ und $p_1 \neq p_2$; $p_1 \parallel_+ (-) p_2$; $p_3 \not\parallel_+ [-] p_1$, dann gilt für jedes Netz $(K_d)_{d \in D} \rightarrow K$ von Kreisen $\gamma(K_d, \alpha(p_{1d}, p_{2d}, p_{3d}))_{d \in D} \rightarrow K \cap ([p_1]_+ \cup [p_2]_-)$.

- K3: Sind $(p_d)_{d \in D} \longrightarrow p$; $(t_d)_{d \in D} \longrightarrow t \in \mathbb{P}$; $(K_d)_{d \in D} \longrightarrow K$,
 $(y_d)_{d \in D} \longrightarrow y \subseteq K$ konvergente Netze über D mit $p \parallel t$;
 $p_d \notin K$; $T_d \in K_d$, $t \in K$ so gilt $\gamma(y_d, \beta(p_d, t_d, K_d))_{d \in D} \longrightarrow$
 $y \cap ([t]_+ \cup [t]_-)$.
- K4: Gilt $(p_{id})_{d \in D} \longrightarrow p_i$ $i = 1, 2, 3$ und $(p_d)_{d \in D} \longrightarrow p \in \mathbb{P}$
mit $p_1 \parallel_+ (-) p_2$ und $p_3 \notin [p_1]_+ (-)$, dann gilt auch
 $\pi^{-(+)}(p_d, \alpha(p_{1d}, p_{2d}, p_{3d}))_{d \in D} \longrightarrow \pi(p_1, p)$ falls $p \notin [p_1]_+$
bzw. $\pi(p, p_3)$ falls $p \notin [p_3]_-$.
- K5: Gilt $(p_d)_{d \in D} \longrightarrow p$; $(t_d)_{d \in D} \longrightarrow t$; $(x_d)_{d \in D} \longrightarrow x \in \mathbb{P}$
und $K_d \longrightarrow K \subseteq K$ und $p \parallel_+ (-) t$, $p_d \in K_d$; $p \in K$ so folgt:
 $\pi^{-(+)}(x_d, \beta(t_d, p_d, K_d))_{d \in D} \longrightarrow \pi(p, x)$ bzw. $\pi(x, p)$ falls
 $x \notin [p]_+$ bzw. $x \notin [p]_-$.
- K6: Gilt $p_1 \parallel_+ (-) p_2 \in \mathbb{P}$; $p_1 \neq p_2$ und $(p_{id})_{d \in D} \longrightarrow p_i$, $i = 1, 3$
 $(p_{2d}) \longrightarrow p_2$; $y_d \longrightarrow y \subseteq K$ mit $p_{id} \in y_d$ für $i = 1, 3$;
 $\gamma(K_d, \alpha(p_{1d}, p_{2d}, p_{3d}))_{d \in D} \longrightarrow K \cap ([p_1]_+ \cup [p_1]_-)$.
- K7: Gelten die gleichen Bedingungen wie in K6 und $(p_d)_{d \in D} \longrightarrow p$
mit $p \notin [p_1]_+$ bzw. $[p_1]$, so gilt $\pi^{-(+)}(p_d, \alpha(p_{1d}, p_{2d}, p_{3d}))_{d \in D} \longrightarrow$
 $\pi(p_1, p)$ bzw. $\pi(p, p_1)$.

Eine topologische Minkowskiebene heiße K_n -kohärent, falls in ihr das Kohärenzaxiom K_n erfüllt ist.

Aus den Kohärenzaxiomen allein folgt noch nicht die Stetigkeit der ternären Operationen, der affinen Unterebenen jedoch läßt sich eine für weitere Untersuchungen sehr nützliche Eigenschaft der Geraden folgern:

2.2. Auf den Punkten der Geraden einer Ableitung A_p einer $K4$ -kohärenten Minkowskiebene, läßt sich eine stetige Multiplikation mit 0- und 1-Element definieren.

Beweis: Zur Konstruktion benutzen wir die Homöomorphismen φ_x auf K aus Satz 1.4 a), wobei K eine Gerade aus A_p ist.

$$x \cdot y := \begin{cases} \varphi_x(y) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

Diese Multiplikation ³⁾ ist nach dem Beweis von 1.4 stetig auf $K \setminus \{0, p\} \times K$.

Sei nun $(x_d)_{d \in D} \rightarrow 0$ ein Netz von Punkten auf K und

$$(y_d)_{d \in D} \rightarrow y \in K \setminus \{p\}$$

sei o. b. d. A. $x_d \neq 0$ für alle $d \in D$, dann gilt nach $K4$:

$$\begin{aligned} (x_d \cdot y_d)_{d \in D} &= \pi_p^-(\pi_p^+(y_d, \alpha_p(0, \pi_p(1, x_d), K))_{d \in D} \rightarrow \\ &\rightarrow \pi_p^-(\pi(y, 0), K) = 0; \end{aligned}$$

d. h. $x \cdot y$ ist auch für $x = 0$ stetig.

Außerdem ist die Abbildung $x \rightarrow \varphi_x(y)$ für festes $y \in K \setminus \{p, 0\}$ offen.

Also hat $x \cdot y$ wegen der Transitivität auf $K_p \setminus \{0\}$, die Eigenschaften einer stetigen Multiplikation. □

Ebenso wie in den übrigen Geometrien kann man auch bei Minkowskiebenen Perspektivitäten und Projektivitäten betrachten. Diese werden nach dem Vorbild der Perspektivitäten von Möbius- und Laguerre-ebenen konstruiert und es werden ebenfalls nach Art und Lage der Zentren drei Typen unterschieden.

³⁾ Unter einer stetigen Multiplikation verstehen wir hier eine in beiden Komponenten simultan stetige Verknüpfung mit genau zwei Elementen 0 und 1 mit $0x = x0 = 0$ und $1x = x1 = x$ für alle x , so daß jede Gleichung $x \cdot y = z$ in beiden Komponenten eindeutig lösbar ist, und aus der Existenz von zweien der Limiten $\lim_{d \in D} a_d$, $\lim_{d \in D} b_d$ und $\lim_{d \in D} a_d b_d$ die des dritten folgt.

2.3 Definition. Sind K_1 und K_2 Kreise einer Minkowskiebene, so versteht man unter einer Perspektivität zwischen K_1 und K_2 eine der folgenden Abbildungen:

Typ I: $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$; $z \in K_1 \cap K_2$; K_3 ein Kreis durch z der weder K_1 noch K_2 berührt.

$\rho_{K_1, K_2, z, K_3} : K_1 \rightarrow K_2$ definiert durch

$$x \rightarrow \begin{cases} \gamma(\beta(x, z, K_3), K_2) \setminus \{z\} & \text{falls } x \neq z \\ z & \text{falls } x = z \end{cases}$$

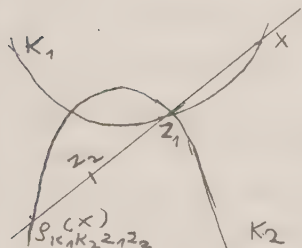
(Perspektivität mittels Berührbüschels)



Typ II: $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$, $z_1 \in K_1 \cap K_2$, $z_2 \notin K_1 \cup K_2$

$\rho_{K_1, K_2, z_1, z_2} : K_1 \rightarrow K_2$ definiert durch

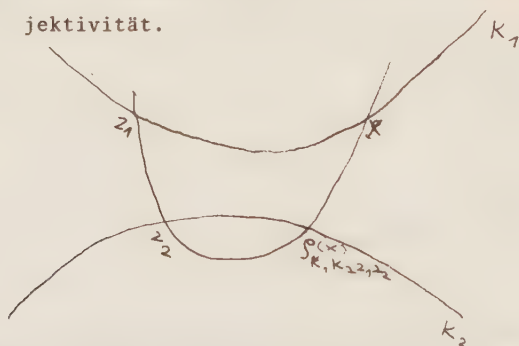
$$x \rightarrow \begin{cases} \pi^-(x, K_2) & \text{falls } z_1 = \pi^+(z_2, K_1) \\ \pi^+(x, K_2) & \text{falls } z_1 = \pi^-(z_2, K_2) \\ \pi^{-(+)}(z_2, K_2) & \text{falls } z_1 \neq x \wedge x = \pi^{+(-)}(z_2, K_1) \\ \gamma(K_2, \alpha(x, z_1, z_2)) \setminus \{z_1\} & \text{falls } z_1 \neq x \wedge |\alpha(x, z_1, z_2) \cap K_2| = 2 \\ z_1 & \text{falls } \alpha(x, z_1, z_2) = \beta(z_2, z_1, K_2) \\ \gamma(K_2, \beta(z_2, z_1, K_1)) \setminus \{z_1\} & \text{falls } x = z_1 \end{cases}$$



Typ III: $\rho_{K_1, K_2, z_1, z_2} : K_1 \longrightarrow K_2$ wobei $z_i \in K_i \setminus K_{i+1}$ $i = 1, 2$
definiert durch:

$$x \longrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \pi^-(x, K_2) & \text{falls} \quad z_1 = \pi^+(z_2, K_1) \\ \pi^+(x, K_2) & \text{falls} \quad z_1 = \pi^-(z_2, K_1) \\ \pi^-(z_1, K_2) & \text{falls} \quad z_1 \nparallel z_2 \wedge x = \pi^+(z_2, K_1) \\ \pi^+(z_1, K_2) & \text{falls} \quad z_1 \nparallel z_2 \wedge x = \pi^-(z_2, K_1) \\ \gamma(\alpha(x, z_1, z_2), K_2) \setminus \{z_2\} & \text{falls} \quad x \neq z_1 \wedge x \nparallel z_2 \wedge |\alpha(x, z_1, z_2) \cap K_2| = 2 \\ z_2 & \text{falls} \quad x = z_1 \wedge x \nparallel z_2 \wedge \alpha(x, z_1, z_2) = \beta(x, z_2, K_2) \\ \gamma(\beta(z_2, z_1, K_1), K_2) \setminus \{z_2\} & \text{bzw. } z_2 \text{ falls } x = z_1 \nparallel z_2 \end{array} \right.$$

Bemerkung: Jede Zusammensetzung von Perspektivitäten heißt Projektivität.



Im allgemeinen topologischen Minkowskiebenen sind Perspektivitäten nicht stetig, da sie aus verschiedenen geometrischen Abbildungen zusammengesetzt sind, die zunächst in keiner topologischen Beziehung stehen. Wie man leicht einsieht, ist die Gültigkeit der Kohärenzaxiome eine notwendige Bedingung für die Stetigkeit der Perspektivitäten. Bei Perspektivitäten von Typ I reicht sie jedoch ohne topologische Zusatzvoraussetzungen nicht aus, da zum Nachweis der Stetigkeit die Existenz gewisser Häufungspunkte wesentlich benutzt wird. (Dies gilt im übrigen auch für Laguerre-

ebenen.) Für Perspektivitäten von Typ II und III läßt sich jedoch zeigen:

2.4 Satz: In kohärenten Minkowskiebenen hängt das Bild eines Punktes unter einer Perspektivität von Typ II oder III stetig von ihm, Definitions- und Bildbereich und den Zentren ab.

Beweis: Typ II: Seien $(K_{id})_{d \in D} \rightarrow K_i$; $(z_{id})_{d \in D} \rightarrow z_i$ $i = 1, 2$
Kreis- und Punktnetze, die die Voraussetzung für eine Perspektivität von Typ II erfüllen.

1. Fall: $z_1 \nparallel z_2 \Rightarrow z_{1d} \nparallel z_{2d}$ für fast alle $d \in D$.

a) $x \nparallel z_i$ $i = 1, 2$ $\alpha(x, z_1, z_2) \neq \beta(z_2, z_1, K_2)$

dann gilt:

$$(\rho_{K_{1d}K_{2d}z_{1d}z_{2d}}(x_d))_{d \in D} = (\gamma(K_{2d}, \alpha(z_{1d}, z_{2d}, x_d)) \setminus \{z_{1d}\})_{d \in D}$$

$$\rightarrow \gamma(K_2 \alpha(z_1, z_2, x)) \setminus \{z_1\} = \rho_{K_1, K_2, z_1, z_2}(x)$$

wegen der Stetigkeit von α und γ ;

b) $x \nparallel z_i$; $i = 1, 2$; $\alpha = (x, z_1, z_2) = \beta(z_2, z_1, K_2)$

dann gilt

$$(\gamma(K_{2d}, \alpha(x, z_{1d}, z_{2d})))_{d \in D} \rightarrow \{z_1\}$$

also auch

$$(\rho_{K_{1d}, K_{2d}, z_{1d}, z_{2d}}(x_d))_{d \in D} \rightarrow z_1 = \rho_{K_1, K_2, z_1, z_2}(x) ;$$

c) $x = z_1$

Aus Axiom K1 folgt dann $(\alpha(x_d, z_{1d}, z_{2d}))_{d \in D} \rightarrow \beta(z_2, z_1, K_1)$
und daraus die Behauptung wie oben.

d) $x \parallel z_1$

Mit Axiom K2 erhält man

$$(\gamma(K_{2d}, \alpha(x, z_{1d}, z_{2d})))_{d \in D} \longrightarrow K_2 \cap ([z_2]_{+(-)} \cup [z_1]_{- (+)})$$

und daraus folgt die Behauptung.

2. Fall: $z_1 \parallel_{+(-)} z_2$

Nach K2 folgt dann für alle $(x_d)_{d \in D} \longrightarrow x \neq z_1$

$$\gamma(\alpha(x_d, z_{1d}, z_{2d}), K_2) \longrightarrow K_2 \cap ([x]_{- (+)} \cup [z_1]_{+ (-)})$$

und für $(x_d)_{d \in D} \longrightarrow z_1$ gilt K6

$$(\gamma(\alpha(x_d, z_{1d}, z_{2d}), K_{2d}))_{d \in D} \longrightarrow K_2 \cap ([z_1]_{+} \cup [z]_{-})$$

und damit die Behauptung.

Bemerkung: Für die Stetigkeit von $\rho_{K_1, K_2, z_1, z_2}(x)$ genügt es K1 und K2 zu fordern, für die Stetigkeit in allen 5 Argumenten K1, K2 und K6.

Für Typ III wird der Beweis analog zu Typ II geführt und es gilt auch obige Bemerkung. □

2.5 Satz: Besitzt eine topologische Minkowskiebene disjunkte Kreise, so gibt es auf jedem Kreis eine binäre Verknüpfung, die ihn zu einer kommutativen Loop macht.

Beweis: Es seien K und K' zwei disjunkte Kreise und $p \in K$ und $p' \in K'$ Punkte.

$$t_1 + t_2 := \rho_{K'Kp'p} \rho_{KK't_1p'}(t_2) \text{ für alle } t_1, t_2 \in K$$

Da die Kreise disjunkt sind, erfüllen K, K', t, p' und K', K, p', p für alle t stets die Voraussetzung für eine Perspektivität Typ III und $t_1 + t_2$ ist stets wohldefiniert und es gilt vom $t_1 + t_2 = t_2 + t_1$, wegen $\rho_{KK't_1p'}(t_2) = \rho_{KK't_2p'}(t_1)$.

Das Einzelelement von "+" ist p , da $\rho_{K'Kp'p}$ gerade die Umkehrabbildung von $\rho_{KK'pp'}$ ist.

Ist $t_1, t_2 \in K$ beliebig, so ist $\rho_{K'Kp't_1} \rho_{KK'pp'}(t_2) = t$ das eindeutig bestimmte Element mit $t_1 + t = t_2$.

Daraus ist ersichtlich, daß auch die Inversenbildung "-" stetig ist. □

Über die Multiplikation in den affinen Unterebenen einer kohärenten Minkowskiebene läßt sich sagen:

2.6. Koordinatisiert man eine kohärente Minkowskiebene mit zwei Parallelklassen als Grundgeraden, so ist die Multiplikation dieses Ternärkörpers stetig.

Bemerkung: Damit ist nicht gezeigt, daß der Ternärkörper stetig ist.

Beweis: $s \circ x = y \iff (0, y) = \pi_p[\pi_p^{-1}((x, 0)\alpha((1, s), (0, 0)), (0, 0))]$
falls $s \neq 0$

$$(0, y) = \pi_p((x, 0)(0, 0)) = (0, 0) ;$$

nach K4 strebt $\pi_p((x, 0), \alpha((1, s)(0, 0)))$ gegen $\pi((0, 0), (x, 0))$, falls $(1, s)$ gegen $(1, 0)$ strebt. □

§ 3 Zusammenhängende und kompakte Minkowskielebenen

Zu Beginn dieses Paragraphen wollen wir einige Bemerkungen über den Zusammenhang in topologischen Minkowskielebenen machen. (Hierbei werden keine Kohärenzaxiome gefordert.)

3.1. a) Der Punktraum einer topologischen Minkowskielebene ist genau dann zusammenhängend, wenn es Kreise und Parallelklassen sind.

b) Der Punktraum einer topologischen Minkowskielebene ist entweder zusammenhängend oder nirgends zusammenhängend. ⁴⁾

Beweis: b) Ist $\mathbb{P}$ nicht zusammenhängend, so sind es auch Kreise und Parallelklassen nicht zusammenhängend und als 3-fach homogene Räume (1.4) nirgends zusammenhängend. $\square$

3.2. a) Der Punktraum der affinen Unterebenen einer topologischen Minkowskielebene ist entweder zusammenhängend oder nirgends zusammenhängend.

b) Die Unterebenen einer zusammenhängenden Minkowskielebene sind zusammenhängend.

Beweis: a) gilt, da die Geraden nach (1.4) 2-fach homogen sind, b) da wegen der dreifachen Homogenität der Kreise mit den Geraden einer affinen Unterebene alle Kreise nirgends zusammenhängend waren. $\square$

⁴⁾ Ein topologischer Raum heißt nirgends zusammenhängend, falls der Durchschnitt der randlosen Umgebungen (Quasikomponente) jedes Punktes der Punkt ist.

Wegen der Homomorphieeigenschaft einer topologischen Minkowskiebene gilt:

- 3.3. a) Eine topologische Minkowskiebene ist genau dann lokal-zusammenhängend, lokalkompakt, lokaleuklidisch oder metrisierbar, wenn dies Punktraum, Kreisraum, Kreise, Parallelklassen oder affine Unterebenen sind.
- b) Der Punktraum einer topologischen Minkowskiebene ist genau dann kompakt, wenn es Kreise oder Parallelklassen sind.

Bemerkung: Kompaktheit und Zusammenhang sind im Gegensatz zur lokalen Kompaktheit, zum lokalen Zusammenhang und zur Metrisierbarkeit Eigenschaften, die im allgemeinen nur der Punktraum hat, während sie der Kreisraum nicht aufweist. Wir wollen deshalb eine topologische Minkowskiebene bereits kompakt oder zusammenhängend nennen, wenn dies für den Punktraum zutrifft.

Als nächstes wollen wir einige Möglichkeiten der Beschreibung der Topologie des Kreisraumes bei kompakten, zusammenhängenden Minkowskiebenen zeigen. (In diesem Paragraphen betrachten wir immer topologische Minkowskiebenen, auch wenn dies nicht erwähnt wird.)

- 3.4. Ist d eine Metrik, die die Topologie des Punktraums einer kompakten zusammenhängenden Minkowskiebene beschreibt, (Existenz folgt aus 1.11) so wird die Topologie des Kreisraums durch die Metrik $d^{+(-)}(K_1, K_2) = \sup\{d(p_1, p_2) : p_1 \parallel_{+(-)} p_2 ; p_i \in K_i, i = 1, 2\}$ (Parallelmetrik) induziert.

Beweis: Da die Mengen (O_1, O_2, O_3) mit $\sigma_i \in [p_i]_{+(-)}$ und O_i offen für $i = 1, 2, 3$, wobei p_1, p_2, p_3 drei verbindbare Punkte sind, eine Basis der Kreistopologie bilden, sieht man sofort: Die von $d^{+(-)}$ induzierte Topologie ist feiner als die Kreistopologie.

Es muß nun noch die Umkehrung gezeigt werden:

Sei $K \in \mathbb{K}$ ein Kreis; V_ε eine ε -Umgebung von K bezüglich der Metrik $d^{+(-)}$. Wegen der Stetigkeit von $\pi^{+(-)}$ existiert zu jedem Punkt $p \in K$ eine offene Umgebung $U_p \times V_p$ von (p, K) mit $U_p \subseteq U_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)$ und $\pi^{+(-)}(U_p \times V_p) \subseteq U_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)$, wobei $U_{\frac{\varepsilon}{2}}(p)$ die $\frac{\varepsilon}{2}$ Umgebung von p bezüglich d ist.

Die Spuren von U_p bilden eine offene Überdeckung von K und wegen der Kompaktheit von K existiert dazu eine endliche Teilüberdeckung $U_{p_1}, \dots, U_{p_n}$.

Dann ist $V := \bigcap_{i=1}^n V_{p_i}$ eine Umgebung von K mit $V \subseteq V_\varepsilon$.

Denn sei $K' \in V$ und $p' \in K'$, dann gilt $p := \pi^{+(-)}(p', K) \in U_{p_i}$ für ein i ; $1 \leq i \leq n$, und deshalb $d(p, p_i) < \frac{\varepsilon}{2}$, wegen $K' \in V_{p_i}$ folgt $d(p', p_i) = d(\pi^{+(-)}(p, K'), p_i) < \frac{\varepsilon}{2}$ also $d(p', p) < \varepsilon$. $\square$

Eine weitere Darstellung der Kreistopologie erhält man folgendermaßen:

3.5. a) In einer kompakten, zusammenhängenden Minkowskiebene ist der Kreisraum hohöomorph zu einem abgeschlossenen Unter-
raum, der mit der kompakt offenen Topologie versehenen
Menge aller stetigen Funktionen $F(K_0, \mathbb{P})$ eines festen
Kreises K_0 in den Punktraum $\mathbb{P}$.

- b) Nennen wir Funktionen aus $F(K_0, \mathbb{P})$ mit gleichen Bildern B -äquivalent, so ist der Zykelraum homöomorph zum Unterraum von $F(K_0, \mathbb{P})/B$ aus denjenigen B -Klassen, deren Funktionen einen Zykel als Bild haben.

Beweis: Es sei d eine Metrik auf $\mathbb{P}$. Da K_0 kompakt ist, wird die kompaktoffene Topologie auf F durch die Metrik

$$d_c(t_1, t_2) := \sup_{x \in K_0} d(t_1(x), t_2(x))$$

induziert.

Die Abbildungen $|K^+(K_0) := \{t_K : K_0 \longrightarrow \mathbb{P} \text{ durch } x \longrightarrow \pi^+(x, K) : K \in |K\}$ sind demnach ein zu $|K$ isometrischer Unterraum bezüglich der Metrik d^+ .

Es ist noch zu zeigen, daß $|K^+$ abgeschlossen ist in $F(K_0, \mathbb{P})$; Hierzu beweisen wir: Konvergiert eine Folge t_{K_n} aus $|K^+(K_0)$ gleichmäßig gegen eine Funktion t , so gilt $t \in |K^+(K_0)$.

1. Fall: Es existieren 3 Punkte p_i $i = 1, 2, 3$, so daß die Punkte $t(p_i)$ $i = 1, 2, 3$ paarweise verbindbar sind. Dann existiert $\alpha(t(p_1), t(p_2), t(p_3))$ und wegen der Stetigkeit des Verbindens gilt $\alpha(t_{K_n}(p_1), t_{K_n}(p_2), t_{K_n}(p_3))$ konvergiert gegen $\alpha(t(p_1), t(p_2), t(p_3))$ bezüglich der Metrik d^+ und damit konvergiert t_{K_n} punktweise gegen $t, (t(p_1), t(p_2), t(p_3))$.

2. Fall: a) $t(K_0)$ ist in höchstens zwei Minusparallelklassen $[t_i]_-$ $i = 1, 2$ enthalten. Da K_0 zusammenhängend ist, kann $t(K_0)$ dann in nur einer Minusparallelklasse $[t_1]_-$ enthalten sein. Sei p ein beliebiger Punkt der nicht in $[t_1]_-$ liegt. Da $[p]_-$ und $[t_1]_-$ kompakte, disjunkte Mengen sind, haben sie positiven Abstand und t_{K_n} kann

nicht gleichmäßig gegen t konvergieren, da
 $t_{K_n}(K) \cap [p]_n \neq \emptyset$ für alle n .

b) Sei $q : F(K_0, \mathbb{P}) \longrightarrow F(K_0, \mathbb{P})/B$ die natürliche Surjektion. Ihre Beschränkung auf K^+ ist stetig und injektiv.

Wegen a) ist ihre Offenheit gezeigt, wenn für jedes t_K eine Umgebungsbasis existiert, deren Elemente durch q in offene Mengen von $q(K^+)$ überführt werden.

Die Mengen $t_{V_\varepsilon} := \{t_{K'} : K' \in V_\varepsilon(K)\}$ mit $\varepsilon > 0$ bilden eine solche.

Beweis: Die Menge der Punkte $\tilde{V}_\varepsilon$, die auf Kreisen aus V_ε liegen, ist nach 1.17 b) offen, also auch $F(K_0, \tilde{V}_\varepsilon)$ und damit auch $q(F(K_0, \tilde{V}_\varepsilon))$ in $F(K_0, \mathbb{P})/B$.

Es bleibt also zu zeigen $q(t_V) = q(F(K_0, \tilde{V}_\varepsilon)) \cap q(K^+)$;

Für $M \subseteq \mathbb{P}$ bezeichne $|KM|$ die Menge aller Kreise, die ganz in M liegen.

Wir zeigen zunächst $|K\tilde{V}_\varepsilon| = V_\varepsilon$.

Sei $w \in |KV_\varepsilon|$, so gilt für jeden Punkt $x \in w$ $d(x, \pi^+(x, K)) < \varepsilon$, also $d^+(w, K) \leq \varepsilon$.

Die Diagonale $D(K)$ von K^2 ist abgeschlossen in K^2 und deshalb kompakt und damit auch $D' := \{(p, t) : t \in w, p \in K, t, p\}$ als stetiges Bild von $D(K)$ unter $(p, p) \longrightarrow (p, \pi^+(p, w))$.

Wäre $d^+(w, K) = \varepsilon$ so gäbe es einen Punkt auf w mit

$$d(y, \pi(y, K)) = \varepsilon.$$

Es gilt also $q(t_V) \subseteq q(F(K_0, \tilde{V}_\varepsilon))$.

Gilt $q(t_0) \in q(K^+)$ für ein t_0 aus $F(K_0, \tilde{V}_\varepsilon)$, so existiert ein $t_{K'} \in K^+$ mit dem gleichen Bild und mit $K' \in |K\tilde{V}_\varepsilon|$ und wegen

$V_\varepsilon = K\tilde{V}_\varepsilon$ gilt $t_{K'} \in t_{V_\varepsilon}$ und damit $q(t_{V_\varepsilon}) = q(F(K_0, \tilde{V}_\varepsilon)) \cap q(K^+)$.
□

Mit Hilfe dieser Beschreibungen der Kreistopologie lassen sich folgende Aussagen leicht beweisen.

3.6. In einer kompakten, zusammenhängenden Minkowskiebene gilt:

- a) Die Menge $|KU$ der ganz in einer offenen Punktmenge liegenden Kreise ist offen.
- b) Zu jedem Kreis K bildet die Gesamtheit aller $|KU$, wobei U eine Punktumgebung von K ist eine Umgebungsbasis von K .
- c) Zwei disjunkte Kreise K_1, K_2 besitzen Umgebungen U_1 und U_2 , so daß jeder Kreis aus U_1 zu jedem Kreis aus U_2 disjunkt ist.
- d) Ein Kreis K und ein Punkt $p \notin K$ besitzen Umgebungen V und U , so daß kein Kreis aus V einen Punkt von U enthält.

Beweis: a) Sei U eine offene Menge und $K \subseteq U$ ein Kreis. Da K und $|P \setminus U$ kompakt sind, gilt $d(K, P \setminus U) = e > 0$. Für $\varepsilon < e$ gilt $V_\varepsilon(K) \subseteq |KU$, da für jeden Kreis K' mit $K' \cap |P \setminus U \neq \emptyset$ gilt:

$$d^+(K', K) \geq d(x, \pi(x, K)) \geq d(K, P \setminus U) \geq e \quad \text{für } x \in K' \cap (P \setminus U).$$

b) folgt aus dem Beweis von 3.5 b).

c) Da jeder metrisierbare Raum normal ist folgt c) aus a).

d) folgt aus der Regularität von $|P$ mit a). □

3.7. In einer kompakten, zusammenhängenden Minkowskiebene sind Berührreihen und Berührscharen, (die Menge aller Berührkreise an einen festen Kreis), abgeschlossen.

Beweis: $y_n \rightarrow y$ eine konvergente Folge aus der Berührschar an K . Wegen 3.6 c) kann y nicht zu K disjunkt sein. Die Behauptung folgt damit aus der Stetigkeit von γ und der Abgeschlossenheit der Diagonale im symmetrischen Produkt von $\mathbb{P}$. $\square$

Nun wollen wir uns mit der Frage befassen, inwieweit in kompakten, zusammenhängenden Minkowskiebenen Kohärenzaxiome gelten.

3.8. Eine kompakte, zusammenhängende Minkowskiebene ist K_4 - und K_5 -kohärent.

Beweis: K_4 : Seien $p_{1n} \rightarrow p_1$ und $p_n \rightarrow p$ Punktfolgen mit $p_1 \parallel_+ p_2$, $p_1 \neq p_2$ und $p_3 \notin [p_1]_+$; $p \notin [p_3]_-$. Die Folge $W_n := \alpha(p_{1n}, p_{2n}, p_{3n})$ hat keinen Häufungspunkt in $\mathbb{K}$, da sonst $p_{2n} = \pi^+(p_{2n}, W_n) \rightarrow \pi^+(p_2, W)$ und $p_{1n} = \pi^+(p_{1n}, W_n) \rightarrow \pi^+(p_1, W)$ und nach Voraussetzung $\pi^+(p_2, W) = \pi^+(p_1, W)$ gelten würde, im Widerspruch zu $p_1 \neq p_2$.

$p'_n := \pi^-(p_n, W_n)$:

Da der Punktraum kompakt ist, hat p'_n einen Häufungspunkt p' .

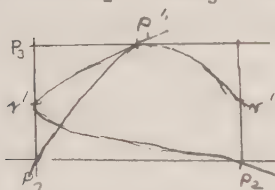
O. b. d. A. seien p_3 und p_2 verbindbar, also darf p' nicht mit beiden Punkten verbindbar sein, da sonst die Folge W_n einen Häufungspunkt hätte. Also gilt $p' \in ([p_3]_+ \cup [p_2]_+ \cup [p_2]_-)$.

Sei zunächst $p \nparallel_- p_2$, d. h. $p' \notin ([p_2]_- \cup [p_1]_-)$.

Wir nehmen an, daß $p' \in [p_3]_+$ sei $r \in [p_3]_- \setminus \{p_3, p_1\}$ und

$r_n := \pi^+(r, W_n)$.

Die Folge r_n hat einen Häufungspunkt r' für den ebenfalls gilt $r' \in ([p_2]_- \cup [p_3]_-)$.



Bei $r' \in [p_2]_-$ wären aber r', p' und p_1 , bei $r' \in [p_3]_-$; r', p' und p_2 verbindbar und W_n hätte einen Häufungspunkt. Es muß also gelten $p' \in [p_2]_+$.

Ist $p \parallel_- p_1$ oder $p \parallel_- p_2$, so folgt $p' = p_1$ oder p_2 , da sich sonst so wie oben ein Häufungspunkt von W_n konstruieren ließe. Damit ist K4 bewiesen.

K5: Seien $p_n \rightarrow p$, $t_n \rightarrow t$, $K_n \rightarrow K$, $x_n \rightarrow x$ konvergente Punkt- bzw. Kreisfolgen mit $t \parallel_+ (-) p$, $p_n \in K_n$ und $p \in K$. Die Folge $W_n := \beta(t_n, p_n, K_n)$ kann, wegen der Stetigkeit von $\pi^{+(-)}$, keinen Häufungspunkt haben, falls $t \neq p$. Sei $x'_n := \pi^-(x_n, W_n)$ und x' ein Häufungspunkt der Folge x'_n .

Wäre x' mit p verbindbar, so hätte W_n den Häufungspunkt $\beta(x', p, K)$. Also gilt $x' = \pi(p, x)$ oder $x' \in [p]_-$ und damit $x \in [p]_-$. Daher gilt das Kohärenzaxiom K5.

3.9. Eine K1-kohärente, kompakte und zusammenhängende Minkowskiebene ist K2-, K3-, K6- und K7-kohärent.

Beweis: K2: Es gelte $K_n \rightarrow K$, $(p_{in}) \rightarrow p_i$ für $i = 1, 2, 3$ $p_1 \parallel_+ p_2$, $p_1 \neq p_2$, $p_3 \notin [p_1]_+$.

K2 besagt dann: $\gamma(K_n \alpha(p_{1n}, p_{2n}, p_{3n})) \rightarrow K \cap ([p_1]_+ \cup [p_2]_-)$.

Die Folge $W_n := \alpha(p_{1n}, p_{2n}, p_{3n})$ kann wegen $p_1 \neq p_2$ keinen Häufungspunkt haben, jedoch hat wegen der Kompaktheit von $\mathbb{P}$

$\{u_n, u'_n\} := \gamma(K_n, W_n)$ einen Häufungspunkt $\{u, u'\}$ in $\mathbb{P}^{2*}$.

I. Es gälte $u \neq u'$ und damit da $u, u' \in K : u \parallel u'$.

Da die Folge W_n keinen Häufungspunkt besitzt, gibt es in der Menge $\{p_1, p_2, p_3, u, u'\}$ keine drei paarweise verbindbaren Punkte.

O. B. d. A. sei $p_2 \not\parallel p_3$ und folglich $u \in [p_3]_+ \cup [p_3]_-$ und $u' \in [p_2]_+ \cup [p_2]_-$, da wegen der Verbindbarkeit von u und u' einer der beiden zu p_2 und der andere zu p_3 parallel sein muß, da sonst drei verbindbare Punkte existieren.

a) Annahme: $u \in [p_3]_+$ und $u' \in [p_2]_+$ ($u \neq p_3$), x ein Punkt mit $x \not\parallel u, u', p_i$, $i = 1, 2, 3$, dann gilt nach K4:

$$x_n := \pi^+(x, W_n) \longrightarrow \pi(x, p_3) \not\parallel u \text{ und } W_n = \alpha(x_n, u_n, p_{2n}) \longrightarrow \alpha(x, u, p_2) \text{ Widerspruch.}$$

b) Die Annahme $u \in [p_3]_-$ und $u' \in [p_2]_-$ wird analog zu a) zum Widerspruch geführt.

c) Falls $u \in [p_3]_+$ und $u' \in [p_2]_-$ wären p_1, u, u' paarweise verbindbar, also muß $u \in [p_3]_-$ und $u' \in [p_1]_+$ und damit die Behauptung gelten.

II. Es sei $u = u'$

Dann gilt $u \parallel p_i$, da sonst entweder $W_n = \alpha(p_i, u_n, u'_n)$ oder $W_n = \beta(p_{in}, u_n, K_n)$ gelte, und W_n würde im ersten Fall wegen K1 und im zweiten wegen der Stetigkeit von β gegen $\beta(p_i, u, K)$ konvertieren.

Aus $u \parallel_+ p_3$ folgt $u \parallel_- p_2$ und damit $u \not\parallel p_1$. Also gilt

$$u = \pi(p_1, p_3) = K \cap ([p_1]_+ \cup [p_3]_-).$$

K3: Es seien $p_n \longrightarrow p$, $t_n \longrightarrow t$ konvergente Punktfolgen mit

$t \parallel_{+(-)} p$, $K_n \longrightarrow K$ und $y_n \longrightarrow y$ Kreisfolgen mit $p_n \in K_n$ und

$t_n \notin K_n$; $\{u_n, u'_n\} := \gamma(y_n, \beta(t_n, p_n, K_n))$ und $\{u, u'\}$ Häufungspunkt von $\{u_n, u'_n\}$. Wie bei K2 folgt $u, u' \parallel p$ und damit im Fall $u \neq u'$ die Behauptung.

Gilt $u = u'$, so muß außerdem $u \parallel t$ gelten, da sonst $W_n = \alpha(u_n, u'_n, t_n)$ wegen K1 gegen $\beta(t, u, y)$ konvergieren würde und im Falle $u_n = u'_n$ für fast alle n $\beta(t_n, u_n, y_n)$.

Sei nun x ein Punkt der weder zu t noch zu p parallel ist, dann gilt nach K5 : $\pi^+(x, W_n) \longrightarrow \pi(x, p) = [x]_+ \cap [p]_-$, wie oben muß gelten $u \parallel \pi[x, p]$, also

$$\begin{aligned} u \in ([x]_+ \cup [\pi(x, p)]_-) \cap ([p]_+ \cup [p]_-) \cap ([t]_- \cup [p]_+) &= \\ &= \{p\} = y \cap ([p]_+ \cup [p]_-). \end{aligned}$$

K7: Es seien $y_n \longrightarrow y$ eine konvergente Kreisfolge und $p_n \longrightarrow p$, $p_{in} \longrightarrow p_i$ für $i = 1, 3$; $p_{2n} \longrightarrow 2$ konvergente Punktfolgen mit

$$p_2 \neq p_1, p_2 \parallel_+ p_1, p \notin [p_1]_- \text{ und } p_{in} \in y_n \text{ für } i = 1, 3$$

$W_n := \alpha(p_{1n}, p_{2n}, p_{3n})$ kann wegen $p_2 \neq p_1$ keinen Häufungspunkt haben und damit muß für den Häufungspunkt p' von $p_n := \pi^+(p, W_n)$ gelten: $p' \parallel p_1$ da sonst $W_n = \alpha(p_n, p_{1n}, p_{3n})$ nach K1 gegen $\beta(p', p_1, y)$ streben würde. Damit folgt die Behauptung. $\square$

K6 folgt mit K7 analog zum Nachweis von K2.

Für den Nachweis von K1 muß die Topologie einer kompakten zusammenhängenden Minkowskiebene noch genauer untersucht werden.

Aus 3.8 folgt zunächst mit 2.2

3.10. a) Die Geraden der Unterebenen einer kompakten Minkowskiebene sind entweder nulldimensional oder zusammenhängend und lokalzusammenhängend.

- b) Eine kompakte topologische Minkowskiebene ist entweder nulldimensional oder zusammenhängend und lokalzusammenhängend.

Dies läßt sich analog zu [Salzmann 1957] § 5, S.446/47 beweisen.

Analog zu [Salzmann TP.67] 7.11 folgt

3.11. Eine kompakte zusammenhängende Minkowskiebene ist bogenzusammenhängend, lokalbogenzusammenhängend und lokalkontraktibel.

3.12. In einer kompakten zusammenhängenden Minkowskiebene gibt es eine beschränkt-kompakte Metrik, die die Punkttopologie induziert, so daß die Beschränkung der zugehörigen Hausdorffmetrik d' der kompakten Teilmengen von $\mathbb{P}$ auf $\mathbb{K}$ die Kreistopologie induziert.

Beweis: Nach Groh [1966], Lemma 5.3 ist Mengenkonvergenz und d' Konvergenz auf den kompakten zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{P}$ äquivalent und beschränktkompakt.

In beliebigen Minkowskiebenen ist Mengenkonvergenz äquivalent zur Konvergenz in $\mathbb{K}$:

Sei K_n mengenkonvergent gegen K , so existieren zu drei verschiedenen Punkten p_i auf K Netze p_{in} mit $p_{in} \in K_n$ und $p_{in} \rightarrow p_i$ und damit folgt $K_n = \alpha(p_{1n}, p_{2n}, p_{3n}) \rightarrow \alpha(p_1, p_2, p_3) = K$ in der Topologie von K .

Gelte $K_n \rightarrow K$ in der Kreistopologie. Jeder Punkt p von K ist wegen der Stetigkeit von π^+ Limes des Netzes $\pi^+(p, K_n)$.

Sei $p_n \longrightarrow p$ ein Netz mit $p_n \in K_n$, so gilt $p_n = \pi^+(p_n, K_n) \longrightarrow \pi^+(p, K) = p$ also $p \in K$. $\square$

Mit der Multiplikation aus 2.2 kann man analog zu Breitsprecher [1971] Satz 2.1 zeigen:

3.13. Die Kreise und Parallelklassen einer lokaleuklidischen topologischen Minkowskiebene sind homöomorph zu einer n -Sphäre S^n .

3.14. Haben die Kreise einer kompakten Minkowskiebene die Dimension 1 oder 2, so sind sie Jordankurven oder 2-Sphären.

Beweis: Nach 3.10 und 3.11 erfüllen die Kreise die Voraussetzung zu Bing, Borsuk [1965] Korollar 8.2 und sind deshalb Manigfaltigkeiten also nach 3.13 1- bzw. 2-Sphären. $\square$

Wie in Groh [1969] 2.6 kann man beweisen:

3.15. Sind die Kreise einer topologischen Minkowskiebene Jordankurven, so gilt:

- a) Ein Kreis K und eine Parallelklasse schneiden sich topologisch ⁴⁾ in $K \cap [p]_+(-)$.
- b) Eine $+-$ und eine $--$ -Parallelklasse schneiden sich topologisch in $[p]_+ \cap [p]_-$.

⁴⁾ Zwei Kurven l_1, l_2 in einem topologischen Raum schneiden (berühren) sich topologisch in p , wenn p eine zur abgeschlossenen Kreisscheibe randtreu homöomorphe Umgebung besitzt, so daß sich die beiden Punktepaare $l_1 \cap \text{rd}U$ und $l_2 \cap \text{rd}U$ auf $\text{rd}U$ trennen (nicht trennen).

c) Zwei Kreise K_1, K_2 mit $|K_1 \cap K_2| = 2$ schneiden sich topologisch in jedem gemeinsamen Punkt.

d) Zwei Kreise K_1, K_2 mit $|K_1 \cap K_2| = 1$ berühren sich topologisch ⁴⁾ in $K_1 \cap K_2$.

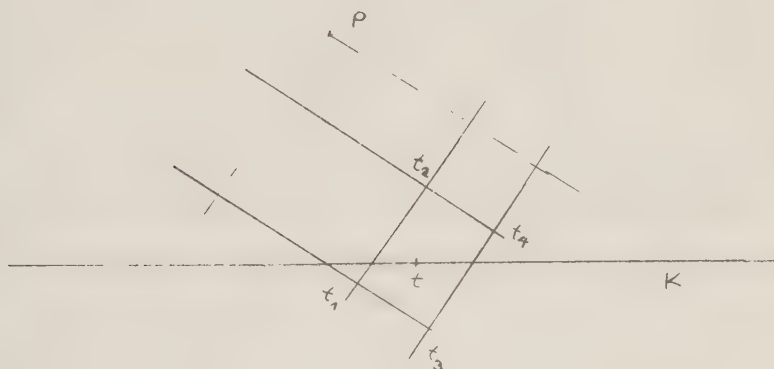
Damit haben wir alle Aussagen bewiesen, die nötig sind, um die Frage nach der Gültigkeit des Axiomes $K1$ in kompakten, zusammenhängenden Minkowskiebenen zu beantworten:

3.16. Eine kompakte, zusammenhängende Minkowskiebene ist $K1$ -kohärent.

Beweis: Seien $p_n \rightarrow p$, $t_{in} \rightarrow t$, $i = 1, 2$ Punktfolgen und $K_n \rightarrow K$ eine Kreisfolge mit $t_{1n} \neq t_{2n}$, $t \parallel p$ und $t_{in} \in K_n$. Aus der Stetigkeit des Schneidens folgt, daß die Folge $N_n = \alpha(p_n, t_{1n}, t_{2n})$ nur den Häufungspunkt $\beta(p, t, K)$ haben kann. Es genügt also zu zeigen: W_n hat einen Häufungspunkt. Als nicht indiskreter zusammenhängender Raum hat jeder Kreis nach 3.10 positive Dimension. Im weiteren Beweis unterscheiden wir die Fälle $\dim K = 1$ und $\dim K \geq 2$.

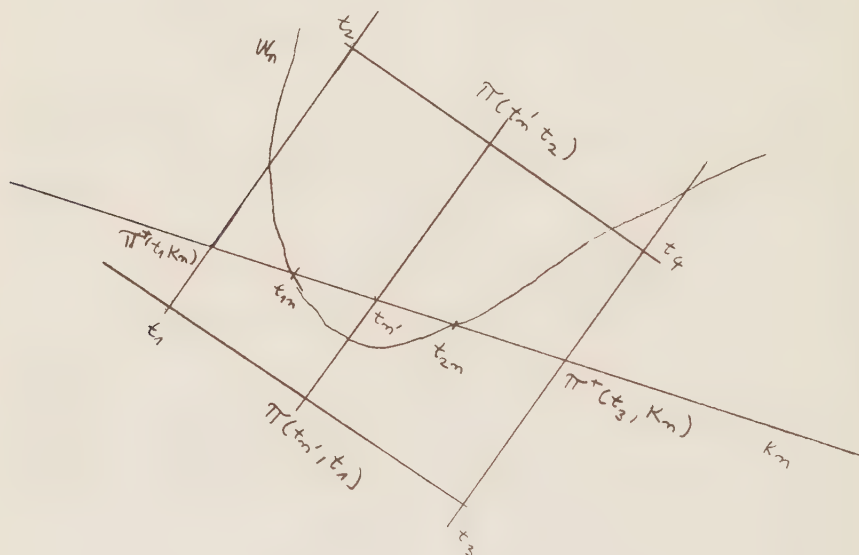
Sei $\dim K = 1$ d. h. Kreise und Parallelklassen sind Jordankurven. Aus 1.13 und der Stetigkeit des Parallelprojizierens folgt: Es existieren vier Punkte t_i , $i = 1, 2, 3, 4$ mit $t_2 \parallel_+ t_1$, $t_3 \parallel_- t_1$, $t_4 \parallel_- t_2$, $t_4 \parallel_+ t_3$, so daß $\pi(t, t_i)$ und $\pi(p, t_i)$ für $i = 1, 3$ und $\pi(t_i, t)$ und $\pi(t_i, p)$ für $i = 1, 2$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten von $[t_i]_+ \setminus \{t_i, t_{i+1}\}$ $i = 1, 3$ bzw. $[t_i]_- \setminus \{t_i, t_{i+2}\}$ $i = 1, 2$ liegen, und außerdem der Kreis K und damit schließlich alle Kreise K_n $[t_i]_+$ in den Zusammenhangskomponenten von $[t_i]_+ \setminus \{t_i, t_{i+1}\}$ treffen,

die $\pi(t_i, t)$ enthalten, und $[t_i]_-$ außerhalb der Komponenten $[t_i]_- \setminus \{t_i, t_{i+2}\}$ die $\pi(t, t_i)$ enthalten für $i = 1, 2, 3, 4$.



Sei $[t_i, t_j]$ $i, j = 1, 2, 3, 4$; $i \neq j$ der Abschluß der Komponente, die die entsprechende Parallelprojektion von t enthält. Dann gilt: $U := h([t_1, t_2], [t_1, t_3])$ mit der Abbildung $h : [t_1]_+ \times [t_1]_- \rightarrow \mathbb{P}$ definiert durch $(x, y) \rightarrow \pi(y, x)$ ist eine kompakte zu p paralleldisjunkte Umgebung von t , und $rd(u) = [t_1, t_2] \cup [t_2, t_4] \cup [t_4, t_3] \cup [t_3, t_1]$. Also ist $rd(u)$ eine Jordankurve, die von jedem Kreis, der Punkte aus dem Innern von K enthält in mindestens zwei Punkten getroffen werden muß. Da schließlich alle Punkte t_{in} im Inneren von U liegen, schneiden schließlich alle Kreise W_n $rd U$ in zwei Punkten.

Als nächstes wird gezeigt, daß mindestens einer der Schnittpunkte von W_n und $rd U$ auf $[t_1, t_2]$ oder $[t_3, t_4]$ liegen muß.



Sei K_n ein Kreis der $[t_i]_+$ in (t_i, t_{i+1}) $i = 1, 3$ schneidet, $t'_n \in K_n$ ein Punkt, der t_{1n} und t_{2n} auf K_n trennt.

$U \setminus (K_n \cup [t'_n]_+)$ besteht aus 4 Zusammenhangskomponenten U_i

mit $rd U_i = [t_i, \pi_+(t_i, K_n)] \cup [\pi_+(t_i, K_n), t'_n] \cup$
 $\cup [t'_n, \pi(t'_n, t_i)] \cup [\pi(t'_n, t_i), t_i]$

für $i = 1, 2, 3, 4$;

(mit $[x, y]$ sei die Menge der Punkte, die in einer Unterebene, die x, y enthält, auf der Parallelklasse bzw. Geraden durch x und y zwischen x und y liegen vereinigt mit $\{x, y\}$).

$rd U_i$ ist Jordankurve und muß deshalb von jedem Kreis, der Punkte aus dem Innern von U_i enthält, in mindestens zwei Punkten getroffen werden.

Da sich nach 3.15 c) K_n und W_n topologisch schneiden, trifft W_n jedes U_i und damit $\text{rd } U_i$ in mindestens zwei Punkten. Da K_n nur in t_{in} und jede Parallelklasse nur einmal getroffen werden, muß W_n entweder $[t_3, t_4]$ oder $[t_1, t_2]$ treffen. O.b.d.A. kann man annehmen, daß die Schnittpunkte von schließlich allen W_n mit $[t_1]_+$ in $[t_1, t_2]_+$ liegen. Deshalb sind ihre Häufungspunkte nicht parallel zu p . Ebenso kann man einen geeigneten Punkt t_0 finden, der weder plus- noch minusparallel zu p und t ist, so daß die Häufungspunkte von $\pi^-(t_0, W_n)$ nicht zu p parallel sind. Nimmt man nun an, daß ein Häufungspunkt von $\pi^+(t_1, W_n)$ zu t minusparallel ist, so muß nach K4 ein Häufungspunkt von $\pi^-(t_0, W_n)$ zu p parallel sein, was ein Widerspruch zur Wahl von t_0 ist.

Damit ist jeder Häufungspunkt von $\pi^+(t_1, W_n)$ weder zu p , noch zu t parallel und die Folge W_n hat einen Häufungspunkt.

Sei nun $\dim K \geq 2$.

Ist u ein von p und t verschiedener Punkt auf $W = \beta(p, t, K)$, so gibt es zu jeder Umgebung V von W paralleldisjunkte, kompakte und zusammenhängende Umgebungen U_{p_1} , U_{t_1} und U_u .

$U := U_u \cap [u]_+$ hat dann ebenfalls diese Eigenschaften. Da $\text{rd } U$ kompakt ist und Kreisfolgen $\alpha(p_n, t_{1n}, t_{2n})$ mit $p_n \rightarrow p$, $K_n \rightarrow K$, $t_{in} \rightarrow t$, $t_{in} \in K_n$, $i = 1, 2$, außer W keinen Häufungspunkt haben können, existieren Umgebungen $V_{K_1}, U_{p_2}, U_{t_2}$ von p, K, t , so daß $\alpha(p', t'_1, t'_2)$ mit $t_i \in K' \in V_{K_1}$ und $t'_i \in U_{t_2}$, $p' \in U_{p_2}$, $t'_1 \neq t'_2$ $\text{rd } U$ nicht treffen. Wegen der Stetigkeit des Parallelprojizierens existieren zusammenhängende Umgebungen U_{t_3} , V_{K_2} von t und K , so daß die Kreise aus den von U_{t_3} erzeugten $+$ -Parallelstreifen nur innerhalb von $U_{t_1} \cap U_{t_2}$ durchlaufen:

$U_t := \pi^+(U_{t_3}, V_{K_2}) \subseteq U_{t_1} \cap U_{t_2}$ ist dann eine zusammenhängende Umgebung, da π^+ stetig und offen ist, und deshalb $\pi^+(U_t, K')$ für jeden Kreis K' . Schließlich existieren zusammenhängende Umgebungen $V_K \subseteq V_{K_1} \cap V_{K_2}$ mit $V_K = \alpha([t_1]_+' , [t_2]_+' , [t_3]_+')$, wobei $[t_i]_+'$ zusammenhängend, paarweise paralleldisjunkte Teilmengen von $[t_i] \cap U_t$ mit $t_i \in U_t$ sind, und $U_p \subseteq U_{p_1} \cap U_{p_2}$ von p und K .

Es wird nun gezeigt, daß die Menge M aller Kreise $\alpha(p', t_1', t_2')$ mit $p' \in U_p$, $t_i' \in U_t$, $K' \in V_K$ und $t_1' \in K'$, $t_1' \neq t_2'$ zusammenhängend ist.

Wegen des Zusammenhangs von $K' \cap U_t$ und der Paralleldisjunktheit von U_p und U_t folgt aus der Stetigkeit von α und Bing, Borsuk [1965] Korollar 7.2, daß die Mengen $M_{K'}$ der Kreise $\alpha(p', t_1', t_2')$ mit $t_1' \neq t_2'$ und $t_i' \in K'$, $p' \in U_p$ für jeden Kreis $K' \in V_K$ zusammenhängend sind.

Es bleibt nun noch zu zeigen, daß zu je zwei Mengen $M_{K'}$ und $M_{K''}$ eine zusammenhängende Teilmenge von M existiert, die mit beiden nicht leeren Durchschnitt hat. Da nach dem oben zitierten Resultat von Bing und Borsuk die Menge der verbindbaren Punkte aus $[t_1]_+'$ und $[t_2]_+'$ zusammenhängend ist, leistet die Menge $\alpha(U_p, [t_1]_+' , [t_2]_+')$ das Gewünschte.

Wir zeigen nun $M \subseteq V$.

Da $\pi^+(U, M)$ nach Konstruktion von M rd U nicht trifft, genügt es zu zeigen, daß mindestens ein Kreis von M mit U nicht leeren Durchschnitt hat.

Ist $W = K$, so kommt W in M vor und wir sind fertig. Ansonsten existiert eine Folge K echt schneidender Kreise durch p und t ,

die gegen W konvergieren, diese liegen schließlich alle in M und treffen schließlich alle U .

Damit ist K_1 bewiesen. □

Zusammenfassend können wir also sagen

3.17 Satz: Eine kompakte, zusammenhängende Minkowskiebene ist kohärent.

Aus Bing, Borsuk [1965] Korollar 7.2 folgt auch noch:

3.18. In einer kompakten Minkowskiebene deren Dimension größer als zwei ist, sind Schnittbüschel, Berührbüschel und der Kreisraum zusammenhängend.

Beweis: Seien K und K' Kreise, die nicht in einem Büschel liegen, so existiert ein Kreis K'' der mit K und K' jeweils in einem Schnitt- oder Berührbüschel liegt; daher gilt die Behauptung. □

Nun wollen wir uns mit Perspektivitäten in kompakten Minkowskiebenen befassen:

3.19 Satz: In kompakten, zusammenhängenden Minkowskiebenen hängt das Bild eines Punktes unter einer Perspektivität stetig von ihm, Definitions- und Bildbereich und Zentren ab.

Beweis: Für Perspektivitäten vom Typ II, III folgt dies bereits aus Satz 2.4.

Seien also $K_{1n} \rightarrow K_1, K_{2n} \rightarrow K_2, K_{3n} \rightarrow K_3$ Kreisfolgen, so

daß die Kreise K_{1n} und K_i für $i = 1, 2, 3$ die Voraussetzung für Perspektivitäten vom Typ I erfüllen und $x_n \rightarrow x$ eine Punktfolge mit $x_n \in K_{1n}$, $x \in K_1$.

Dann gilt $z_n \in \gamma(K_{1n}, K_{2n}) \cap \gamma(K_{2n}, K_{3n}) \cap \gamma(K_{1n}, K_{3n})$
 $\rightarrow z := K_1 \cap K_2 \cap K_3$.

a) Aus $x \neq z$ folgt

$$\begin{aligned} \rho_{K_{1n}, K_{2n}, K_{3n}}(x_n) &= \gamma(K_{2n}, \beta(x_n, z_n, K_{3n})) \setminus z_n \rightarrow \rho_{K_1 K_2 K_3}(x) \text{ da} \\ \text{aus } \rho_{K_{1n}, K_{2n}, K_{3n}}(x_n) &\rightarrow z \text{ nach K1 } \beta(x_n, z_n, K_{3n}) = \\ &= \alpha(x_n, z_n, \rho_{K_{1n}, K_{2n}, K_{3n}}(x_n)) \rightarrow \beta(x, z, K) \end{aligned}$$

folgte und K_1, K_2, K_3 nicht die Voraussetzung für eine Perspektivität vom Typ I erfüllen.

b) Sei $x = z$

1) $x_n = z_n$ folgt $x_n \rightarrow z$ und damit die Behauptung.

2) Sei $x_n \neq z_n$ und y Häufungspunkt von

$$y_n := \rho_{K_{1n}, K_{2n}, K_{3n}}(x_n).$$

Wäre $y \neq z$, so würde aus K1 $\beta(x_n, z_n, K_{3n}) = \alpha(x_n, z_n, y_n) \rightarrow \beta(y, z, K_1)$ folgen und K_1 müßte K_3 berühren. $\square$

Aus Satz 2.5 folgt mit 3.13 und [James 1957] Satz 1.1

3.20. Lokaleuklidische Minkowskiebenen deren Dimension größer als zwei ist, besitzen keine disjunkten Kreise.

§ 4 Kompakte zweidimensionale Minkowskielebenen

Wie wir im vorhergehenden Paragraphen gesehen haben, ist der Punktraum einer zweidimensionalen Minkowskiebene ein Torus $S_1 \times S_1$, Kreise und Parallelklassen Jordankurven, wobei Parallelklassen gerade die Mengen der Form $\{x\} \times S_1$ bzw. $S_1 \times \{x\}$ mit $x \in S_1$ sind.

Damit läßt sich nun auch der Kreisraum bestimmen.

4.1 Satz: Der Kreisraum einer kompakten 2-dimensionalen Minkowskiebene ist die disjunkte Vereinigung von zwei zu $\mathbb{R}^2 \times S_1$ homöomorphen Räumen.

Beweis: Es seien p_i , $i = 1, 2, 3$ drei verbindbare Punkte, dann ist $|K|$ homöomorph zu den Tripeln paarweise verbindbarer Punkte aus $\bigcup_{i=1}^3 [p_i]_+$ und damit zu den Tripeln aus S_1^3 mit paarweise verschiedenen Komponenten. Auf diesen operiert die Gruppe $PGL_2(\mathbb{R})$ scharf transitiv als Transformationsgruppe. $\square$

Bemerkung: Aus 1.3 folgt: Berührbüschel sind in 2-dimensionalen kompakten Minkowskielebenen zusammenhängend und enthalten deshalb nur Kreise aus einer Komponente von $|K|$, Schnittbüschel enthalten immer Kreise aus beiden Zusammenhangskomponenten.

Im Gegensatz zu höherdimensionalen Minkowskielebenen existieren in 2-dimensionalen kompakten Minkowskielebenen disjunkte Kreise.

4.2. In einer kompakten 2-dimensionalen Minkowskiebene gibt es zu jedem Kreis K und jedem Punkt $p \notin K$ einen Kreis durch p der zu K disjunkt ist.

Beweis: Sei A_p die in p abgeleitete affine Unterebene. Die Spur von K in A_p besteht aus zwei Jordankurven mit der Eigenschaft: Jede Tangente ⁵⁾ an K^1 oder K^2 trennt K^1 von K^2 in A_p .

Sei G eine Tangente an K^1 und L an K^2 ; G^i bzw. L^i die Komponente in A_p von G bzw. L die K^i enthält.



Sind G und L parallel, so leistet jede Parallele zu G und L durch einen Punkt $G^2 \cap L^1$ bzw. $G^1 \cap L^2$ das Gewünschte. Schneiden sich G und L in einem r , so leistet die Verbindungsgerade von r und einem beliebigen Punkt p' aus $G^2 \cap L^1$ das Gewünschte, da sie ganz in $(G^2 \cap L^1 \cup G^1 \cap L^2 \cup \{r\})$ verläuft. $\square$

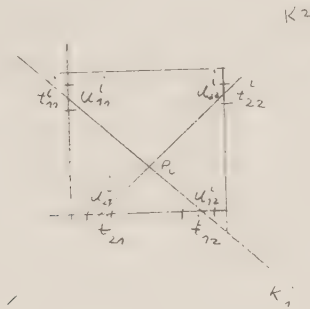
4.3. Der Definitionsbereich des echten Schneidens ist in zusammenhängenden kompakten Minkowskielebenen offen.

Beweis: Ist die Dimension von $\mathbb{P}$ größer als zwei, so folgt die Behauptung mit 3.20 aus der Stetigkeit des Schneidens.

⁵⁾ Tangente bedeutet hier, Gerade von A_p , die den Kreis K berührt.

Für $\dim P = 2$ wird gezeigt, daß jedes Paar aus sich echtschneidenden Kreisen einer Umgebung aus Kreispaairen mit dieser Eigenschaft besitzt:

Seien K_1 und K_2 Kreise, die sich in zwei Punkten p_1 und p_2 schneiden. Zu p_i $i = 1, 2$ existieren Umgebungen U_i , so daß $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $\text{rd } U_i$ die Vereinigung zusammenhängender Teilmengen von $+$ - bzw. $-$ -Parallelklassen ist und K_j , $j = 1, 2$ $\text{rd } U_i$ im Innern der Teilmengen von Parallelklassen, die $\text{rd } U_i$ bilden, in genau zwei Punkten schneidet, so daß sich die Schnittpunkte t_{11}^i, t_{12}^i von K_1 und t_{21}^i, t_{22}^i von K_2 mit $\text{rd } U_i$ auf $\text{rd } U_i$ trennen.



Die Punkte t_{jk}^i besitzen zusammenhängende Umgebungen U_{jk}^i auf den entsprechenden Parallelklassen, so daß sich U_{1K}^i und U_{2K}^i auf $\text{rd } U_i$ trennen.

Zu K_j gibt es nun Umgebungen O_j^i von Kreisen, die die $+$ - bzw. $-$ -Parallelklassen der Punkte t_{jk}^i in U_{jk}^i schneiden und die beiden anderen Klassen außerhalb von $\text{rd } U_i$. Da sich Kreise

und Parallelklassen topologisch schneiden, muß jeder Kreis O_1^i jeden Kreis aus O_2^i , wegen der Trennungseigenschaft der Umgebungen U_{jK}^i , in U_i schneiden.

Damit ist $O_1^1 \cap O_1^2 \times O_2^1 \cap O_2^2$ eine Umgebung von (K_1, K_2) , die das Gewünschte leistet. $\square$

Zum Abschluß dieses Paragraphen wollen wir noch zeigen, daß jedes System von Jordankurven auf dem Torus, das die Axiome einer Minkowskiebene erfüllt, bereits eine topologische Minkowskiebene ist.

4.4 Satz: Zu einer Minkowskiebene deren Kreise und Parallelklassen homöomorph zu S_1 sind, existiert genau eine Topologie des Punkt- und Kreisraumes, so daß die Ebene eine topologische Minkowskiebene ist.

Beweis: Da die Abbildung π stetig sein muß, ist der Punktraum homöomorph zum Produkt von zwei Parallelklassen und die Ebene läßt sich auf $S_1 \times S_1$ so darstellen, daß die $+-$ bzw. $--$ Parallelklassen Jordankurven der Form $\{r\} \times S_1$ bzw. $S_1 \times \{r\}$ sind. Die Topologie auf dem Kreisraum muß nach 3.12 die von der Hausdorffmetrik induzierte sein.

Im Folgenden können wir also annehmen, daß die Minkowskiebene in der soeben beschriebenen Standarddarstellung vorliegt.

Nachweis der Stetigkeit des Verbindens.

Seien $p_i \in P$, $i = 1, 2, 3$ 3 Punkte auf einem Kreis K und $p_{in} \rightarrow p_i$ 3 Folgen von Punkten.

Es gilt $K_n \rightarrow K$ genau dann, wenn jeder Punkt von K Häufungspunkt einer Folge von Punkten $\{x_n\}$ mit $x_n \in K_n$ ist und keine

Es sei P der Durchschnitt eines abgeschlossenen $+-$ und $--$ -Parallelstreifens, die beide weder p_3 noch x enthalten, aber Umgebungen von p_1, p_2 und q .

Dann gilt:

- 1) G trennt p_1, p_2 von q in P .
- 2) Die Spur von K_n in P muß, für n genügend groß, zusammenhängend sein, da der Kreis K_n , der jede Parallelklasse genau einmal trifft, sonst keine Punkte in der Nähe von p_3 haben könnte.

Jeder Kreis K_n hat demnach, für n genügend groß, zwischen p_{1n} und q_n jeweils einen Schnittpunkt s_{in} , $i = 1, 2$ mit G .

Sei r_n ein Punkt auf K_n der s_{1n} von s_{2n} in P trennt. Der Durchschnitt von $[r_n]_-$ mit G liegt dann ebenfalls in P . Man wählt sich nun einen abgeschlossenen $+-$ -Parallelstreifen P_n , so daß p_{2n} und die entsprechende Umgebung von p_3 im Innern von P_n liegen, aber P_n keinen der Punkte p_{1n}, s_{in}, q_n und x enthält. Das Gebiet zwischen G u. $[r_n]_-$ in P_n wird in $\mathbb{P}$ von einer Jordankurve begrenzt, die von K_n in mindestens zwei Punkten geschnitten wird. Da $[r_n]_-$ mit K_n innerhalb von P_n keinen Schnittpunkt hat und p_{3n} außerhalb dieses Gebiets liegt, in P_n liegt, muß einer der Schnittpunkte auf G liegen. Dies ist aber ein Widerspruch zur Eindeutigkeit des Verbindungskreises von drei Punkten.

Die Stetigkeit des Parallelprojizierens $\pi_+(-)$ folgt aus Groh [1969] Lemma zu Satz 3.9..

Da alle Ableitungen topologische affine Ebenen sind folgt, daß sich Parallelklassen, Kreise und Parallelklassen und Kreis, die sich echt schneiden, in den Schnittpunkten topologisch schneiden. Damit folgt aus dem bisher gezeigten, daß mit Hilfe des Verfahrens im Beweis von 4.3 zu jedem Paar sich echt schneidender Kreise eine Umgebung mit der gleichen Eigenschaft existiert. Die Stetigkeit des Schneidens folgt dann ebenfalls aus dem oben zitierten Lemma.

Stetigkeit des Berührens β .

Sei $p_n \rightarrow p$, $q_n \rightarrow q$, $K_n \rightarrow K$ Punkt- bzw. Kreisfolgen, die die Voraussetzungen für das Berühraxiom erfüllen. Wegen der Stetigkeit des Schneidens, kann die Folge $W_n := \beta(p_n, q_n, K_n)$ keinen anderen Häufungspunkt als $W := \beta(p, q, K)$ besitzen. Da aus dem bisher Bewiesenen, auch das Kohärenzaxiom K4 folgt, läßt sich die Konvergenz der Folge W_n , mit der Methode von 3.16 zeigen. □

Aus [Groh 1969] Lemma zu Satz 3.9 folgt die Stetigkeit der Abbildung π für jedes System von Jordankurven auf $S_1 \times S_1$, das den Axiomen einer Minkowskiebene genügt, das heißt es existiert ein topologischer Isomorphismus zu einer Minkowskiebene, in der eben benutzten "Standarddarstellung".

Damit folgt aus dem vorhergehenden Satz:

Korollar: Zu jeder Minkowskiebene, deren Kreise und Parallelklassen Jordankurven sind und deren Punktraum homöomorph zum Torus ist, existiert genau eine Topologie des Kreisraumes, so daß die Ebene topologisch ist.

§ 5 Automorphismengruppe einer topologischen kompakten
Minkowskiebene der Dimension 2

Seien $M(P, K)$ und $M'(P', K')$ Minkowskielebenen. Eine bijektive Abbildung $\gamma : M \rightarrow M'$ mit $P^\gamma = P'$ und $K^\gamma = K'$ heißt geometrischer Isomorphismus oder Kreisverwandtschaft, falls aus $p \in K$, $p^\gamma \in K'$ für alle $p \in P$ und $K \in \mathcal{K}$ folgt. Es ist klar, daß durch einen geometrischen Isomorphismus parallele Punkte auf parallele Punkte abgebildet werden, allerdings können Minus- auf Plusparallelklassen abgebildet werden. (Bei nichttrivialen Automorphismen, die einen Fixpunktkreis besitzen, ist dies immer der Fall.)

Sind M und M' topologische Minkowskielebenen, so heißt ein geometrischer Isomorphismus γ genau dann Isomorphismus der topologischen Minkowskielebenen, falls γ und γ^{-1} stetig sind. Wie bereits in der Folgerung zu 1.20 bemerkt wurde, ist dies genau dann der Fall, wenn γ auf dem Punktraum oder dem Kreisraum topologisch ist. Da die affinen Unterstrukturen den Punktraum offen überdecken, ist ein geometrischer Isomorphismus bereits dann topologisch, wenn er auf jeder Ableitung topologisch ist.

Mit Salzmann [TP 67] folgt daraus:

5.1. Jeder geometrische Isomorphismus von 2-dimensionalen kompakten Minkowskielebenen ist topologisch.

Um die topologischen Eigenschaften der Automorphismengruppe einer kompakten zweidimensionalen Minkowskiebene untersuchen zu können, benötigen wir zunächst folgende Definition:

5.2 Definition: Es seien $K_i \in \mathbb{K}$ $i = 1, 2, 3$ und drei Kreise durch einen Punkt q , die in A_q ein Dreieck bilden, die Punktmenge des von K_i in A_q begrenzten Dreiecks, heißt dann Triode $D^1(K_1, K_2, K_3, q)$. Ebenso definiert man Trioden $D^2(K_1, K_2, [p]_+(-), q)$ und $D^3(K, [p]_+, [p]_-, q)$ als die Punktmenge des von $K_1, K_2, [p]_+(-)$ bzw. $K, [p]_+, [p]_-$ begrenzten Dreiecks. Als offene Triode D_0 bezeichnet man die Inneren Punkte einer Triode D .

Ebenso wie in Salzmann [T.P. 67] 3.1 folgt dann:

5.3. Die offenen Trioden D_0 , sogar die offenen Trioden D_0^i , $i = 1, 2$ oder 3 , durch einen Punkt q , die einen Punkt p enthalten, bilden eine Umgebungsbasis von p . (Siehe auch Strambach [1970] 3.1.).

Nach Salzmann [1967] 1.1 gilt auch:

5.4. Die Identität ist der einzige Automorphismus einer kompakten 2-dimensionalen Minkowskiebene, der die Eckpunkte einer Triode festläßt.

Nun läßt sich zeigen, indem man die einzelnen Beweisschritte in Salzmann [1967] und Strambach [1970] wie bei Laguerreebenen (siehe Schenkel [1978]) entsprechend modifiziert:

5.5. Konvergiert eine Folge von Automorphismen γ_n einer 2-dimensionalen kompakten Minkowskiebene auf den Ecken einer

Triode $D(K_1, K_2, K_3, q)$ gegen Punkte e_i $i = 1, 2, 3, 4$, die ebenfalls Ecken einer Triode sind, so konvergieren sie punktweise gegen einen Automorphismus γ .

Damit folgt mit Montgomery, Zippin Seite 182, 237:

5.6 Satz: Die Gruppe der Automorphismen einer topologischen Minkowskiebene ist in der natürlichen Topologie eine Liegruppe und operiert als topologische Transformationsgruppe.

Bemerkung: In der Automorphismengruppe stimmen die Topologie der punktweisen, der kompakt-offenen und der Konvergenz auf den Ecken einer Triode überein (siehe Salzmann [TP 67] 3.7.).

Sei nun Γ^* die volle Automorphismengruppe einer Minkowskiebene. Die Zusammenhangskomponente Γ' der Eins ist in einem Normalteiler Γ vom Index ≤ 2 enthalten, der $+-$ -parallele auf $+-$ -parallele und $--$ -parallele auf $--$ -parallele Punkte abbildet und deshalb auch eine Wirkung auf die $+-$ und $--$ -Parallelklassen induziert. Der Kern $N_{+(-)}$ der Wirkung von Γ auf die $+-$ bzw. $--$ -Parallelklassen, also die Untergruppe der Automorphismen, die die $+-$ bzw. $--$ -Parallelklassen als Ganzes festlassen, heißt $+-$ bzw. $--$ -Trägheitsgruppe. Ist $|\Gamma^*/\Gamma| = 2$, so ist N_+ zu N_- konjugiert, also insbesondere isomorph.

Im Fall von zweidimensionalen kompakten Minkowskiebenen operiert Γ also auch als topologische Transformationsgruppe auf der Kreislinie und sowohl $N_{+(-)}$ als auch $\Gamma/N_{+(-)}$ müssen effektive Trans-

formationsgruppen der Kreislinie sein. Nach dem Satz von Brouwer (siehe Brouwer [1909]) gilt daher:

5.7. Die Automorphismengruppe einer kompakten zweidimensionalen Minkowskiebene ist höchstens sechsdimensional.

Bemerkung: Im allgemeinen muß Γ nicht direktes Produkt von N_+ und N_- sein, jedoch ist Γ bei zweidimensionalen kompakten Minkowskiebenen, immer Untergruppe vom Produkt zweier Transformationsgruppen der Kreislinie, da Γ auf dem Torus fasertreu operiert.

Mit Hilfe des Satzes von Brouwer lassen sich die Gruppen, die $+$ $(-)$ - Trägheitsgruppen zweidimensionaler Minkowskiebenen sein können, angeben:

5.8. Als $+$ $(-)$ - Trägheitsgruppen einer 2-dimensionalen kompakten Minkowskiebene kommen folgende Gruppen in Frage:

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) , L_2 , \mathrm{SO}_2 , \mathbb{R} .$$

Beweis: Nach 5.4 ist eine Abbildung $\gamma \in N_{+(-)}$ genau dann die Identität, wenn sie mehr als zwei $- (+)$ - Parallelklassen festläßt. □

Ist die $+$ $-$ (oder $--$ Trägheitsgruppe) einer zweidimensionalen kompakten Minkowskiebene die $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{R})$, so ist die Ebene die klassische Minkowskiebene über den reellen Zahlen. Es zeigt sich nämlich, daß die Minkowskiebene zum gruppentheoretischen Modell der klassischen Minkowskiebene (siehe Benz [1973] Seite 65) isomorph ist, wenn man folgende Koordinatisierung einführt:

Sei $K_0 \in \mathbb{K}$ ein Kreis und $p_0 \in K$ ein Punkt. Jedem Punkt $p \in \mathbb{P}$ ordnen wir folgendes Punktepaar (p_1, p_2) als Koordinaten zu.

$$1) \quad p_1 := \pi(p_0, \pi_+(p, K_0))$$

$$2) \quad p_2 := \pi(p_0, p)$$

Da die $PGL_2(\mathbb{R})$ scharf dreifachtransitiv auf der Kreislinie operiert, operiert sie scharf transitiv auf den Kreisen der Minkowskiebene (siehe Beweis zu Satz 4.1) und man erhält durch folgende Zuordnung eine stetige Bijektion von $\mathbb{K}$ auf $PGL_2(\mathbb{R})$:

$$K \longrightarrow \gamma \quad \text{falls} \quad K_0^\gamma = K.$$

Die Inzidenzbeziehung läßt sich folgendermaßen beschreiben:

$$(p_1, p_2) \mid \gamma \quad \text{genau dann, wenn} \quad p_1^\gamma = p_2.$$

Die Minkowskiebenen die eine 3-dimensionale $+$ $(-)$ -Trägheitsgruppe zulassen, lassen sich alle ähnlich beschreiben.

5.9 Satz: Besitzt eine kompakte zweidimensionale Minkowskiebene eine zur $PSL_2(\mathbb{R})$ isomorphe $+$ $(-)$ -Trägheitsgruppe, so läßt sie sich folgendermaßen darstellen:

$$\mathbb{P} := S_1 \times S_1$$

$$\mathbb{K} := PSL_2(\mathbb{R}) \cup f PSL_2(\mathbb{R}), \quad \text{wobei } f \text{ ein orientierungs-umkehrender Homöomorphismus der Kreislinie ist.}$$

Ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{P}$ liegt genau dann auf einem Kreis $\gamma \in \mathbb{K}$, falls gilt: $x^\gamma = y$.

Die $+$ -Parallelklassen sind die Mengen der Form $\{x\} \times S_1$ und die $-$ -Parallelklassen die der Form $S_1 \times \{y\}$ mit $x, y \in S_1$.

Eine solche Ebene werde mit $M(f)$ bezeichnet.

Zwei Ebenen $M(f_1)$ und $M(f_2)$ sind genau dann isomorph, wenn gilt $f_1 \text{PSL}_2(\mathbb{R}) = f_2 \text{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Beweis: Da f orientierungsumkehrend ist, operiert die Abbildungsmenge $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \cup f \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ scharf dreifachtransitiv auf der Kreislinie. Damit existiert zu jedem Tripel verbindbarer Punkte genau ein Kreis, der die drei Punkte enthält. Da Berührbüschel zusammenhängend sind, folgen die übrigen Axiome, wie beim gruppentheoretischen Modell, aus den Eigenschaften der $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$. $\square$

Korollar: Eine kompakte zweidimensionale Minkowskiebene mit einer zur $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ isomorphen Trägheitsgruppe ist bereits klassisch, wenn eine Ableitung desargues ist.

Beweis: Es folgt $f \in \text{PGL}_2(\mathbb{R})$ und damit ist die Ebene isomorph zum gruppentheoretischen Modell. $\square$

Zum Abschluß dieser Arbeit wollen wir zweidimensionale kompakte Minkowskiebenen mit 4-dimensionaler Automorphismengruppe klassifizieren.

5.10 Satz: Ist die Dimension der Automorphismengruppe einer kompakten zweidimensionalen Minkowskiebene ≥ 5 , so ist die Ebene die klassische Ebene über den reellen Zahlen.

Beweis: Ist die Automorphismengruppe einer ebenen Minkowskiebene 5-dimensional, so sind nach dem Satz von Brouwer beide Trägheitsgruppen mindestens zweidimensional und da $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ einfach ist, ist sie +- oder -- Trägheitsgruppe der Ebene. Damit existier-

eine affine Unterebene mit einer zur $L_2 \times L_2$ isomorphen Automorphismengruppe. Diese ist nach Strambach [1970] klassisch. Die Behauptung folgt aus Korollar zu Satz 5.9. $\square$

5.11 Satz: Läßt eine kompakte zweidimensionale Minkowskiebene eine vierdimensionale Automorphismengruppe zu, so können folgende Fälle auftreten:

- I Die Zusammenhangskomponente der Eins in dieser Automorphismengruppe ist isomorph zu $PSL_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ oder $PSL_2(\mathbb{R}) \times SO_2$ und die Ebene ist klassisch.
- II Die Zusammenhangskomponente der Eins ist isomorph zu $L^2 \times L^2$ und die Ebene läßt sich wie folgt beschreiben:
Punktraum

$$P := (\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{\infty\})$$

$$G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + d\} \cup \{(\infty, \infty)\} \mid m, d \in \mathbb{R} \quad m \neq 0\}$$

$$K := \{(x, y) \mid y = a f_i(x-b) + c\} \cup \{(b, \infty), (\infty, c)\} \mid a \in \mathbb{R}^+ \\ b, c \in \mathbb{R}, i = 1, 2\},$$

wobei

$$f_1 = \begin{cases} \frac{1}{x^{r_1}} & \text{für } x > 0 \\ \frac{-z_1}{(-x)^{r_1}} & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad \text{mit } r_1, z_1 \in \mathbb{R}^+$$

$$f_2 = \begin{cases} \frac{-1}{x^{r_2}} & \text{für } x > 0 \\ \frac{z_2}{(-x)^{r_2}} & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad \text{mit } r_2, z_2 \in \mathbb{R}^+$$

$$\text{Kreisraum } |K := G \cup K.$$

Beweis: Nach dem Satz von Brouwer muß jede Trägheitsgruppe, bei vierdimensionaler Automorphismengruppe mindestens eindimensional sein, da die Faktorgruppe treu auf der Kreislinie operiert. Ist eine Trägheitsgruppe eindimensional, so muß die andere, da $\text{PSL}_2^{(n)}(\mathbb{R})$ nur nulldimensionale Normalteiler hat, isomorph zu $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$ sein. Als Zusammenhangskomponente der Eins können also nur die Gruppen $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, und $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \text{SO}_2$, mit der Standardwirkung auf den Torus, auftreten.

Im ersten Fall existiert dann eine affine Unterebene mit einer zu $L^2 \times \mathbb{R}$ isomorphen Untergruppe. Da diese nach Strambach [1970] klassisch ist, ist nach Korollar zu 5.9 auch die Minkowskiebene klassisch.

Im zweiten Fall wird die Ebene dargestellt wie in 5.9; d. h. die Kreise werden als eine Menge von Abbildungen $\text{PSL}_2(\mathbb{R}) \cup f \text{PSL}_2(\mathbb{R})$ angesehen, wobei f ein Orientierungsumkehrender Homöomorphismus der Kreislinie ist. Die -- Trägheitsgruppe SO_2 wirkt dann auf die Kreise durch Linksmultiplikation. Es gilt deshalb $\text{SO}_2 f \subseteq f \text{PSL}_2$ und damit ist $f^{-1} \text{SO}_2 f$ eine zur SO_2 isomorphe Untergruppe und folglich gilt nach dem Satz von Cartan, Iwasawa (s. Montgomery, Zippin, 4.13)

$$f^{-1} \text{SO}_2 f = \gamma \text{SO}_2 \gamma^{-1} \quad \text{mit} \quad \gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) .$$

Die Konjugation mit γf ist also ein stetiger Automorphismus von SO_2 . Daher gilt $\gamma f \in \text{PGL}_2(\mathbb{R})$ und folglich auch $f \in \text{PGL}_2(\mathbb{R})$. Das heißt aber, die Ebene ist klassisch.

Im Fall von zweidimensionalen Trägheitsgruppen ist die Zusammenhangskomponente der Eins isomorph zur Gruppe $L_2 \times L_2$. Sie besitzt einen universellen Fixpunkt. Die Ableitung in diesem Punkt ist klassisch, da sie eine zu $L_2 \times L_2$ isomorphe Automorphismengruppe besitzt. Da $L^2 \times L^2$ auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{K} \setminus G$ transitiv wirkt, genügt es aus jeder Komponente genau einen Kreis

zu bestimmen. Wir bestimmen hierzu die Kreise durch $(0, \infty)$, $(\infty, 0)$, $(1, 1)$ und $(0, \infty)$, $(\infty, 0)$, $(1, -1)$.

Sei $S := \mathbb{R}^+(s_1, s_2)$ mit $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^+$ die Standgruppe des Kreises K_1 durch $(0, \infty)$, $(\infty, 0)$, $(1, 1)$.

Sie ist Diagonale Untergruppe der Punkte $(0, \infty)$, $(\infty, 0)$ also von $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.

Die Spur von K_1 in $\mathbb{A}_{(\infty, \infty)}^*$, läßt sich wegen der Stetigkeit des Berührens, als stetig differenzierbare Funktion $f_1: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, die in jeder Komponente ihres Definitionsbereichs streng monoton fallend ist, darstellen.

Sei nun $f_1'(1) = -r_1$, $r_1 \in \mathbb{R}^+$ der Wert der ersten Ableitung von f_1 an der Stelle 1; dann erfüllt, da Tangenten durch S auf Tangenten abgebildet werden, f_1 folgende Differentialgleichung

$$f_1'(x) = \frac{-f_1(x)r_1}{x}.$$

Diese hat bekanntlich die Lösung $y = \frac{c}{x r_1}$ und da $t_1(1) = 1$ gilt folgt

$$f_1 = \frac{1}{x r_1} \quad \text{für } x > 0.$$

Führt man die gleichen Überlegungen auch für den negativen Definitionsbereich der Funktion t_1 durch, so erhält man

$$f_1(x) = \frac{-z_1}{r_1'(-x)} \quad \text{für } x < 0,$$

wobei $z_1, r_1' \in \mathbb{R}^+$ und $f_1(-1) = -z_1$ und $f_1'(-1) = -r_1'$.

Betrachtet man die Wirkung der Gruppe $L_2 \times L_2$ auf die Kreise, so zeigt eine leichte Rechnung, daß $r_1' = r_1$ gilt.

Durch analoge Schlüsse erhält man auch die Funktion f_2 , die den Kreis K_2 durch $(0,\infty)$, $(\infty,0)$, $(-1,1)$ beschreibt.

Die hier angegebenen Minkowskiebenen sind eine Verallgemeinerung einer Klasse, der von Hartmann [1977] angegebenen nicht klassischen Minkowskiebenen. Die Beweise von Hartmann, daß es sich bei den vorliegenden Kurvensystemen um Minkowskiebenen handelt, lassen sich fast wörtlich übertragen, da durch die Lage dreier Punkte festgelegt ist, ob der Verbindungskreis durch einen orientierungserhaltenden oder orientierungsumkehrenden Homöomorphismus der Kreislinie dargestellt werden kann. □

LITERATURVERZEICHNIS

- BENZ, W. [1968]: Über die Grundlagen der Geometrie der Kreise in der pseudo-euklidischen (Minkowskischen) Geometrie. J. Reine Angew. Math. 21, S.97-101.
- BENZ, W. [1973]: Vorlesung über Geometrie der Algebren Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
- BETTEN, D. [1973]: Topologische Transformationsgruppen. Vorlesungsausarbeitung Tübingen.
- BING, R.H., BORSUK, K. [1965]: Some remarks concerning topological homogeneous spaces. Ann. Math. 81, S. 100-111.
- BREITSPRECHER, S. [1971]: Projektive Ebenen, die Mannigfaltigkeiten sind. Math. Z. 121, S.157-174.
- BROUWER, L.E.J. [1909]: Die Theorie der endlichen kontinuierlichen Gruppen, unabhängig von den Axiomen von Lie. Math. Ann. 67, S. 246-267.
- DUGUNDJI, J. [1966]: Topology. Allyn and Bacon, Boston.
- FREUDENTHAL, H. [1957]: Kompakte projektive Ebenen. Illinois J. of Math. 1, S. 9-13.
- GROH, H. [1966]: Topologische Laguerreebenen. Diplomarbeit Frankfurt.
- GROH, H. [1968]: Topologische Laguerreebenen I. Abh. aus Math. Sem. Hamburg 32, S. 216-231.

- GROH, H. [1969]: Topologische Laguerreebenen II .
Abh. aus Math. Sem. Hamburg 34.
S. 11-21.
- GROH, H. [1969]: Characterization of Ovoidal La-
guerre Planes. Arch. Math. 20,
S. 219-224.
- HARTMANN, E. [1977]: Eine Klasse nicht einbettbarer
reeller Minkowskiebenen. Preprint
Nr. 378, TH Darmstadt.
- James, I.M. [1957]: Multiplications on spheres I .
PAMS 8, S. (192-196).
- MONTGOMERY, B., ZIPPIN, L. [1955]: Topological Transformations Groups.
New York: Interscience.
- SALZMANN, H. [1955]: Über den Zusammenhang in topologi-
schen projektiven Ebenen.
Math. Z. 61, S. 489-494.
- SALZMANN, H. [1957]: Topologische projektive Ebenen.
Math. Z. 67, S. 436-466.
- SALZMANN, H. [1963]: Zur Klassifikation topologischer
Ebenen. Math. Ann. 150, S.226-241.
- SALZMANN, H. [1967]: Kollineationsgruppen ebener Geome-
trien. Math. Z. 99, S. 1-15.
- SALZMANN, H. [TP 67]: Topological planes. Advances Math.2,
S. 1-60.
- STRAMBACH, K. [1970]: Sphärische Kreisebenen. Math. Z. 113,
S. 266-292.

STRAMBACH, K. [1970]:

Salzmanebenen mit punkttransitiver dreidimensionaler Kollineationsgruppe. Indag. Math. 32, S. 253-267.

WÜLK, R. [1966]:

Topologische Möbiusebenen.
Math. Z. 93, S. 311-333.

Lebenslauf

Am 21. Februar 1953 wurde ich als zweites Kind des Oberlehrers an Sonderschulen Georg Schenkel und seiner Frau Ruth, geborene Leonhardt, Lehrerin, in Schwabach geboren.

Nach vier Jahren Volksschule (1959 - 1963) trat ich im Oktober 1963 in den Humanistischen Zweig des Adam-Kraft-Gymnasiums ein.

1967 wechselte ich in das Wolfram-von-Eschenbach-Gymnasium Schwabach (musisches Gymnasium) über.

Im Juni 1972 bestand ich das Abitur.

Vom WS 1972/73 bis WS 1977/78 studierte ich Mathematik mit Nebenfach Physik an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg.

Im Februar 1975 legte ich das Vordiplom, im Januar 1978 das Diplom in Mathematik ab.

Seit April 1978 bin ich als wissenschaftliche Mitarbeiterin an der Technischen Hochschule Darmstadt, Fachbereich Mathematik, angestellt.

